Coordenadas cilíndricas parabólicas

GRUPO 03:
Mikel Ugarte Janeiro
Juan Félix Aguilar Romero
Ernesto Pastor Gonzalez
Alejandro Santisteban Sancho
Alejandro Vaquero Giménez

Motivación

El objeto de este trabajo es estudiar las coordenadas cilindricas parabólicas, sus propiedades y sus usos en la ingeniería y más concretamente en la obra civil.

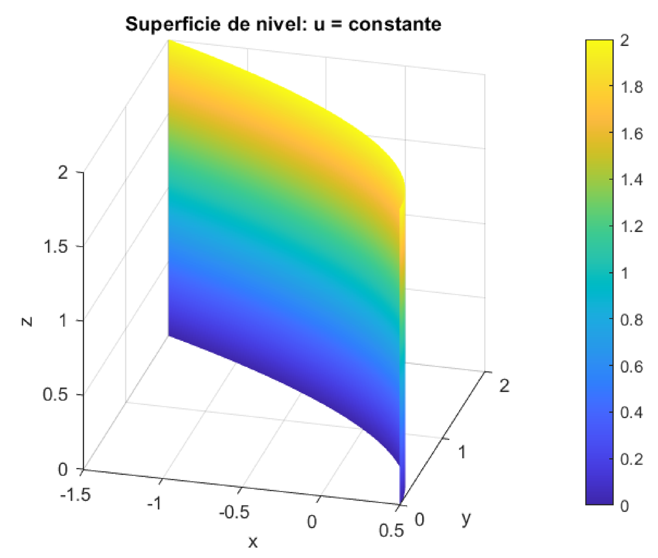
Relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilindricas parabólicas

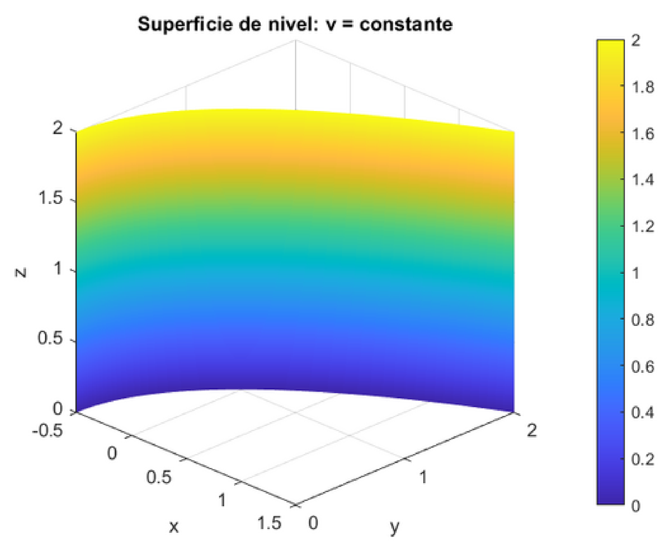
Siendo U>0: $\begin{cases} x_1 = \left(\frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ x_2 = uv \\ x_3 = z \end{cases}$

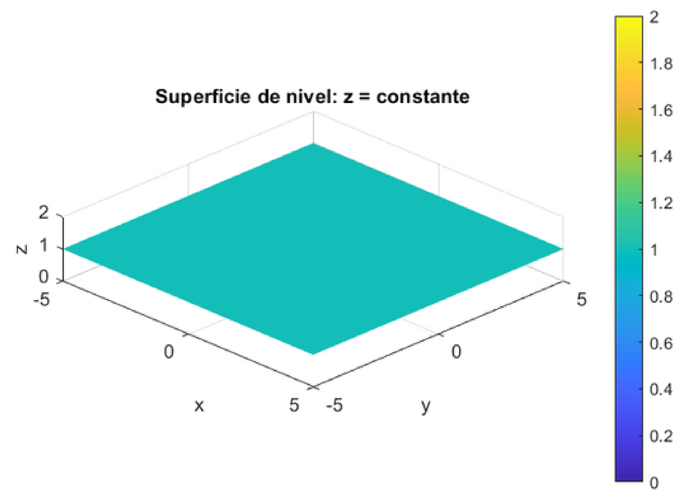
Matrices cambio de base

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = Q^t = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Superficies de nivel de distintos campos escalares







Campo posición

$$h = h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$\begin{pmatrix} v_u \\ v_v \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2}{2} \\ uv \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{h} & \frac{v}{h} & 0 \\ -\frac{v}{h} & \frac{u}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2}{2} \\ uv \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{h}\frac{u^2-v^2}{2} + \frac{v}{h}uv \\ -\frac{v}{h}\frac{u^2-v^2}{2} + \frac{u}{h}uv \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{uh}{2} \\ \frac{vh}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

Sustituyendo h resulta:

$$\vec{r} = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{2}\vec{e}_u + \frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{2}\vec{e}_v + z\vec{e}_z$$

Gradiente

El gradiente de $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$ en el punto cartesiano $(0, 1, 1)$:

$\boxed{\nabla f = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_v}$

Divergencia

La divergencia del campo posición es: $\boxed{div(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{r} = 3}$

Rotacional

El rotacional del campo posicion es: $\boxed{rot(\vec{r}) = \nabla » \vec{R} = 0ů\vec{e_u} + 0ů\vec{e_v} + 0ů\vec{e_z} = \vec{0}}$
El rotacional del campo posición es el vector **0** por ser el campo posición un campo conservativo

Lineas coordenadas

Manteniendo V y Z constantes: $\gamma_u(t) : \begin{cases} x_1 = \left(\frac{t^2-v^2}{2}\right) \\ x_2 = tv \\ x_3 = z \end{cases}$

Manteniendo U y Z constantes: $\gamma_v(t) : \begin{cases} x_1 = \left(\frac{u^2-t^2}{2}\right) \\ x_2 = ut \\ x_3 = z \end{cases}$

Manteniendo U y V constantes: $\gamma_z(t) : \begin{cases} x_1 = \left(\frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ x_2 = uv \\ x_3 = t \end{cases}$

Las líneas coordenadas asociadas a u y a v tienen forma de parábolas, mientras que la asociada a z es una recta vertical.

Representación gráfica lineas coordenadas

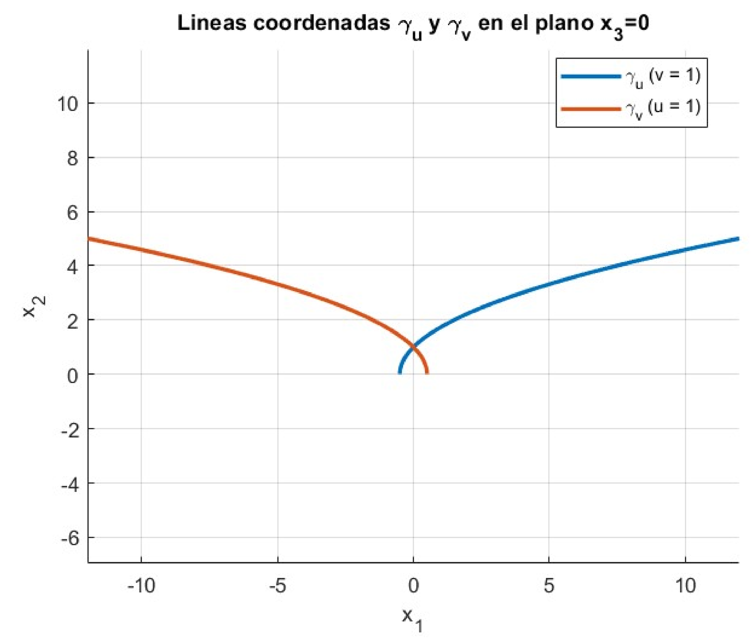


Figure 1. Lineas coordenadas en el plano $x_3 = 0$

Campo velocidad y vector tangente de lineas coordenadas

Denotamos con $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_z$ a las parametrizaciones vectoriales asociadas a $\gamma_u, \gamma_v, \gamma_z$, respectivamente.

El vector velocidad se obtiene como $\vec{r}_i'(t) = \frac{\partial x_1}{\partial i}\vec{i} + \frac{\partial x_2}{\partial i}\vec{j} + \frac{\partial x_3}{\partial i}\vec{k}$.

$$\gamma_u(t) = \underbrace{(t, v, z)}_{\text{cilíndricas parabólicas}} = \underbrace{(\frac{t^2-v^2}{2}, tv, z)}_{cartesianas} \Rightarrow \vec{r}_u'(t) = u\vec{i} + v\vec{j}$$

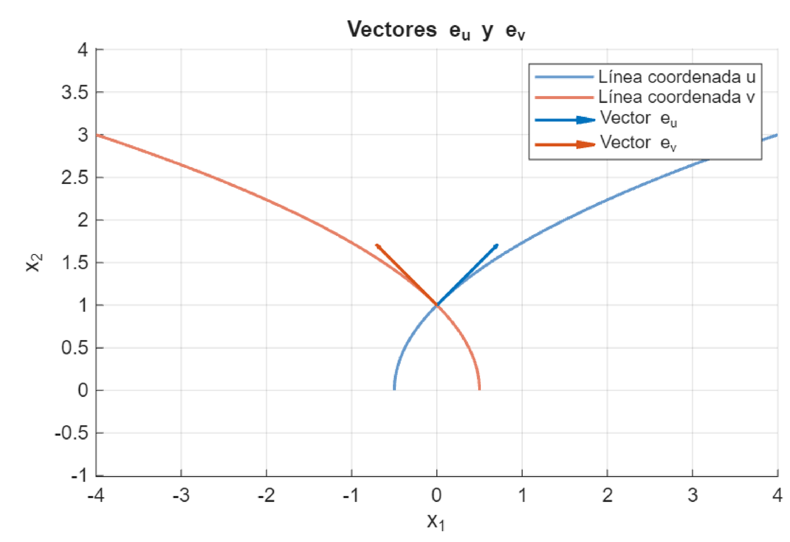
$$\gamma_v(t) = \underbrace{(u, t, z)}_{\text{cilíndricas parabólicas}} = \underbrace{(\frac{u^2-t^2}{2}, ut, z)}_{cartesianas} \Rightarrow \vec{r}_v'(t) = -v\vec{i} + u\vec{j}$$

$$\gamma_z(t) = \underbrace{(u, v, t)}_{\text{cilíndricas parabólicas}} = \underbrace{(\frac{u^2-v^2}{2}, uv, t)}_{cartesianas} \Rightarrow \vec{r}_z'(t) = \vec{k}$$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u'}{|\vec{r}_u'(t)|} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{j}$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v'}{|\vec{r}_v'(t)|} = -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{i} + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\vec{r}_z'}{|\vec{r}_z'(t)|} = \vec{k}$$



Ejemplos uso de la parábola en construcciones

Figure 2. Planta embotelladora de Bacardí en Mexico y Viaducto de Garabit

Bibliografía

https://es.wikiarquitectura.com/edificio/planta-embotelladora-de-bacardi/
https://www.minube.com/rincon/viaducto-de-garabit-a260791