



Series de Fourier

Paula Dopico Muñoz, Diego García Raposo, Manuel Herreros Zarco

EDP - Grado en Matemáticas - UPM

Motivación

Las series de Fourier nos permiten descomponer funciones complejas en una suma infinita de términos más manejables en función de senos, cosenos y constantes. Lo que se pretende es estudiar esta aproximación para diferentes funciones y analizar cuán precisa es la aproximación usando las series de Fourier.

Series de Fourier

Sea el espacio de Hilbert

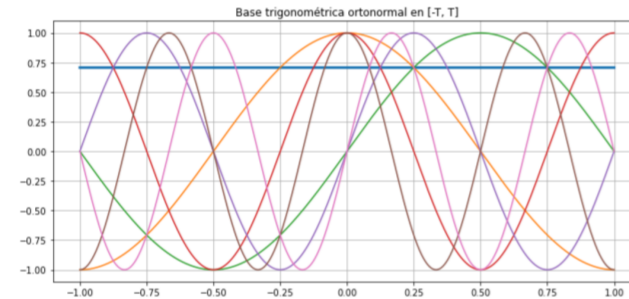
$$L^2([-T, T]) = \left\{ f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

se define un producto escalar

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-T}^T f(x) g(x) dx.$$

En este espacio las funciones sinusoidales generan una base ortonormal, también conocida como base trigonométrica.

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2T}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right), \frac{1}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right\}_{n \geq 1}.$$



Sea $f(x)$ una función con x variable real, su serie de Fourier asociada será:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2T}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

donde, con $n \geq 1$,

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2T}} \right\rangle = \int_{-T}^T f(x) \frac{1}{\sqrt{2T}} dx, \quad a_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right\rangle = \int_{-T}^T f(x) \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx,$$

$$b_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right\rangle = \int_{-T}^T f(x) \frac{1}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \quad n \geq 1.$$

Convergencia

Para estudiar el tipo de convergencia de una serie existen dos formas:

- Convergencia puntual $\rightarrow \forall x \in \Omega, \lim_{N \rightarrow \infty} |f(x) - S_N(f)(x)| = 0$.
- Convergencia uniforme $\rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f(x) - S_N(f)(x)| = 0$.

Estudiaremos la convergencia de una función dependiendo de varios parámetros:

Número de términos de la serie

A continuación, realizaremos un estudio de la convergencia en función del número de términos de la serie de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La serie de Fourier que aproxima a esa función es:

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(2\pi n x) \right)$$

con $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ y $b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}$

Visualizamos esta función en Python, variando el número de términos de la serie para ver cómo eso afecta a su convergencia.

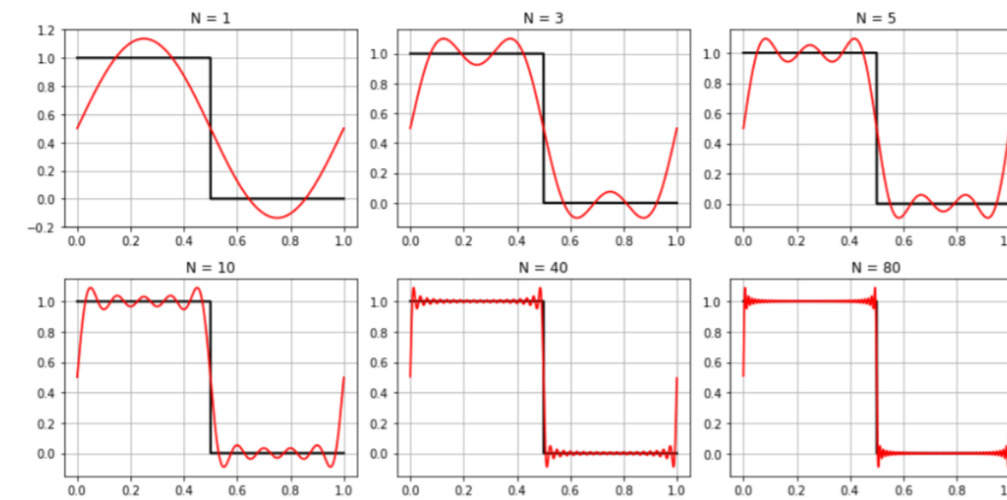


Figure 1. Convergencia de la serie de Fourier a la función $f(x)$ según el número de términos con $N=1, 3, 5, 10, 40$ y 80

En la figura se puede observar que la convergencia no es uniforme, debido a la discontinuidad de salto de la función. Además cuanto mayor es el valor de N , mejora la aproximación de $S_N(f)(x)$ en los puntos de continuidad. Cuando $N=1$ la serie se aleja considerablemente de la función original, pero cuando $N=80$ la aproximación es casi idéntica a la función salvo en los puntos de discontinuidad. Además, en los puntos de discontinuidad y los extremos — ya que es una aproximación periódica — podemos ver que aumentan las oscilaciones. Este fenómeno es conocido como el fenómeno de Gibbs y solo ocurre en funciones con discontinuidades de salto.

Regularidad de la función

Sabemos por el Teorema de Dirichlet, si una función f es periódica, continua a trozos, de variación acotada, entonces:

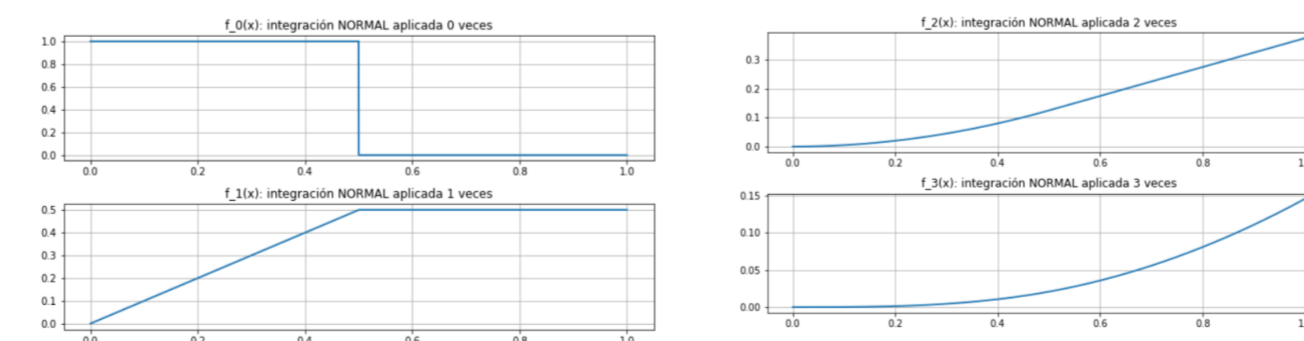
- En los puntos de continuidad,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

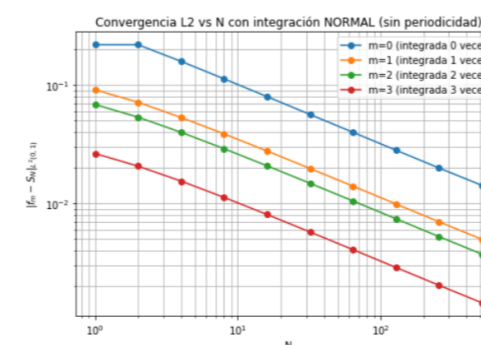
- En los puntos de discontinuidad,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Vamos a estudiar cómo la regularidad de la función que se aproxima influye en su convergencia. Primero consideraremos la misma función que en los apartados anteriores ($S_N(f)(x)$). A partir de esta función, calcularemos sus integrales, con el fin de tener un control más preciso de la regularidad de la función, ya que será derivable tantas veces como veces la hayamos integrado. Una vez tengamos tanto la función como las integrales realizaremos un estudio de su convergencia para ver si la regularidad juega algún papel en ella.



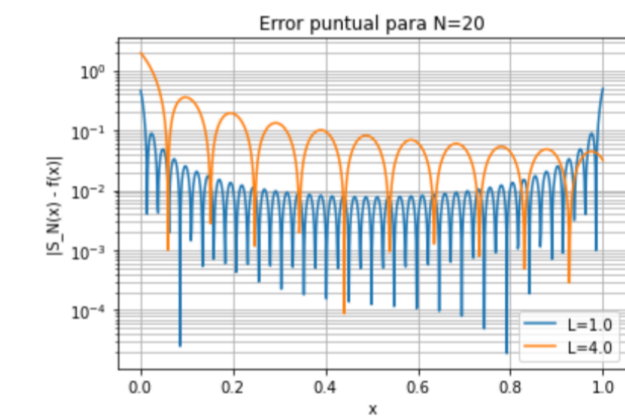
Ahora haremos un estudio de convergencia en $L^2(0, 1)$ de las 4 funciones para ver como comparan entre ellas:



Vemos en la gráfica que cuanto más regular es la función mejor converge cuando $N \rightarrow \infty$. Aun así, este resultado no indica que la regularidad influya significativamente. Esto se debe a que aunque localmente la función sea mas regular, a nivel global, como la función no es periódica, sigue presentando discontinuidades en su expansión periódica lo que ralentiza la convergencia global de la función en L^2

Longitud del intervalo

Por último estudiaremos como influye la longitud del intervalo con el que estamos trabajando en la convergencia puntual de la serie. Utilizaremos una función sencilla como $f(x) = x$ definida en el intervalo $[0, 1]$ y observaremos como converge puntualmente la serie de Fourier en un punto aleatorio del intervalo x_0 . Después, veremos si aumentando el intervalo de definición de la función a $[0, 4]$ hace que la convergencia puntual en x_0 cambie de alguna forma. Ahora, para cada longitud del intervalo construimos la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = x$ y evaluamos el error puntual en $|S_N(x) - f(x)|$ en ambos casos.



De la gráfica podemos sacar varias conclusiones. Se ve como los errores se representan en forma de oscilaciones, donde los errores correspondientes a la aproximación en el intervalo $[0, 4]$ son en general superiores a los correspondientes a la aproximación en $[0, 1]$. Esto se debe principalmente a que dado un intervalo mayor, pero manteniendo la N fija, la frecuencia de las oscilaciones disminuye, haciendo más difícil aproximar la función en $[0, 1]$.

Además, algunos puntos concretos tienen un error mucho menor. Esto es consistente para ambos intervalos y ocurre porque al ser la aproximación de Fourier una función periódica, hay puntos donde los términos del seno y el coseno producen una cancelación mejor. Esa es también la explicación de porque el error puntual es menor para algunos puntos de la función definida en el intervalo $[0, 4]$. Aunque globalmente la aproximación en $[0, 1]$ es mejor, puede ocurrir que en un punto concreto para un valor específico de N el error en ese punto sea mejor para $[0, 4]$.

Por otra parte, en la función azul se observa un patrón oscilatorio decreciente a medida que te acercas al punto medio y creciente cuando te aproximas a los extremos. Esto se produce porque la función no es periódica y cuando consideramos su extensión periódica hay discontinuidades de salto en los extremos, lo cual implica que se produzca el fenómeno de Gibbs, que eleva el error.

En cambio, en la otra solo se aprecia Gibbs en el extremo inicial del intervalo, esto se debe a que al estar definida en un intervalo mayor, su periodo también es mayor y no se produce un salto en el 1, sino que el error medio tenderá a ir bajando hasta el punto medio del intervalo y será cuando se acerque a 4 que se apreciará de nuevo Gibbs.

En conclusión, la convergencia puntual no es solo local, sino que también está controlada por el comportamiento global periódico de la función