Funciones aleatorias a partir de coeficientes de Fourier

Daniel Tormos   Fernando Madrid   Nicolás Sánchez

Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I.A.A.B.

Introducción

Las series de Fourier son una herramienta para aproximar funciones de cuadrado integrable por una suma infinita de funciones continuas periódicas. En este trabajo no vamos a analizar una función conocida, sino que crearemos funciones aleatorias a partir de coeficientes de Fourier aleatorios.

Objetivos

El objetivo de este trabajo es crear y analizar funciones aleatorias en $[-\pi, \pi]$ que tengan una cierta regularidad (continuidad, suavidad, etc). Para ello, trataremos de responder cuestiones sobre estas funciones tanto estadísticas como cualitativas, desde un punto de vista, primero, teórico, y posteriormente, numérico y computacional.

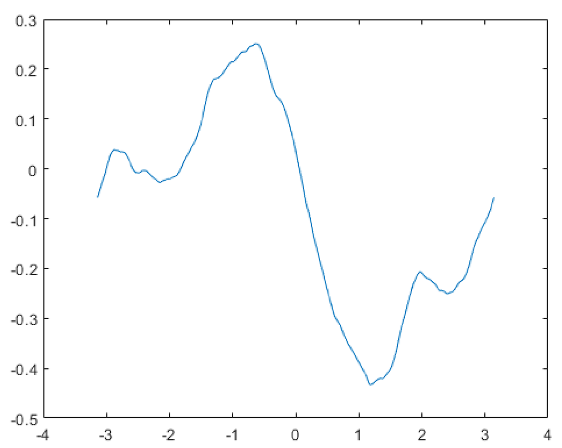
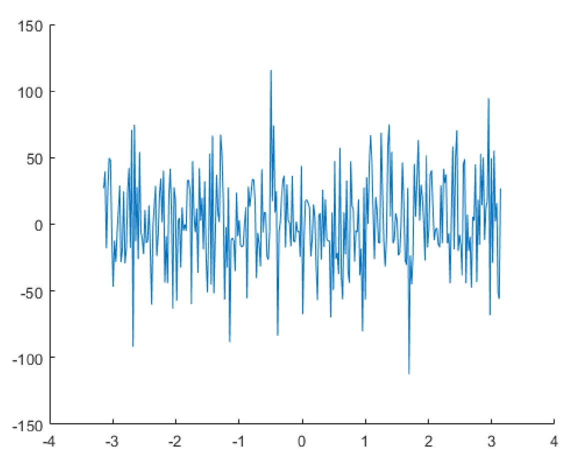


Figure 1: Ejemplo de función aleatoria

Planteamiento

Una primera idea para crear una función F aleatoria podría ser generar $2N+1$ coeficientes de Fourier ($N+1$ para las funciones trigonométricas pares y N para las impares) con distribución uniforme entre -1 y 1 ($a_n, b_n \in U(-1,1)$). Sin embargo, podemos observar en la siguiente gráfica que la función no converge para N muy grande. Es necesario que los coeficientes tiendan a 0 con una cierta rapidez.



Para resolver este problema, consideremos la familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ definidas en $[1, \infty)$ tal que $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Elegiremos un α y tomaremos los coeficientes $a_n, b_n \in U(-f_\alpha(n), f_\alpha(n))$. Más adelante observaremos que la regularidad de F depende mucho de la elección de α (al que llamaremos "ritmo de decaimiento").

Análisis estadístico

Sea la serie de Fourier $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, con coeficientes aleatorios que decaen con f_α. Recordamos que para $a_n \in U(-f_\alpha(n), f_\alpha(n))$:

$$\mathbb{E}[a_n] = 0, \quad \mathrm{Var}[a_n] = \frac{f_\alpha(n)^2}{3}.$$

Si $\alpha > 1$, se tiene que $|F(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$, por lo el teorema de la convergencia dominada permite intercambiar la esperanza con el sumatorio. Usando las propiedades de la esperanza y la varianza, la independencia de los coeficientes y alguna identidad trigonométrica, se tiene que, para $x, y \in [-\pi, \pi]$ fijos, c alguna constante:

$$\mathbb{E}[F(x)] = \mathbb{E}[F(y)] = 0,$$

$$\mathrm{Var}[F(x)] = \mathrm{Var}[F(y)] = c \sum_{n=1}^{\infty} f_\alpha(n)^2,$$

$$\mathrm{Cov}[F(x), F(y)] = c' \sum_{n=1}^{\infty} f_\alpha(n)^2 \cos(n(x-y)).$$

Observamos que la esperanza y la varianza no dependen del punto elegido y la covarianza depende de la distancia entre los puntos.

Para el estudio numérico de estas cuestiones hemos calculado 10^5 funciones aleatorias tanto para $\alpha = 2$ como para $\alpha = 1$, y hemos calculado la esperanza/media, la varianza y la covarianza en distintos puntos. Los resultados han sido los siguientes:

	media	Var	Cov
alpha = 2	0.00013056	0.13715	0.075941
alpha = 1	0.00022248	0.19285	0.078777

Figure 2: Tabla de datos

Además, los resultados son los mismos independientemente de los puntos escogidos, salvo por la covarianza.

Análisis de regularidad

La regularidad de F depende fuertemente del ritmo de decaimiento. Es fácil ver que los coeficientes de la derivada k-ésima F^k decaen como $\frac{n^k}{n^\alpha}$. Para que la derivada k-ésima converja uniformemente, y por tanto, $F \in \mathcal{C}^k$, se requiere que $\alpha - k > 1$.

Por otro lado, una buena forma de ver la regularidad de F de forma numérica es calculando su variación. La variación de una función da una noción sobre el grado de oscilatoriedad de esta. Se define como

$$V_{-\pi}^{\pi}(F) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{m} |F(x_{i+1}) - F(x_i)|,$$

donde $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ es una partición de $[-\pi, \pi]$.

Tomaremos una partición de 600 nodos y $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$. Calcularemos 1000 funciones aleatorias y sus variaciones. Después, calcularemos la media, máximo, mínimo y desviación típica de la variación obtenida para cada función.

	Media	Desviacion Tipica
alpha = 2	1.6175	0.43089
alpha = 1	15.769	0.53933
alpha = 1/2	112.82	4.2265

Figure 3: Tabla de datos

En la tabla anterior se concluye que hay una relación clara entre la variación esperada de una función generada por coeficientes aleatorios y el ritmo de decaimiento de los coeficientes: si α decrece, la variación crece exponencialmente. A continuación se muestran 3 gráficas de funciones aleatorias, una de cada tipo.

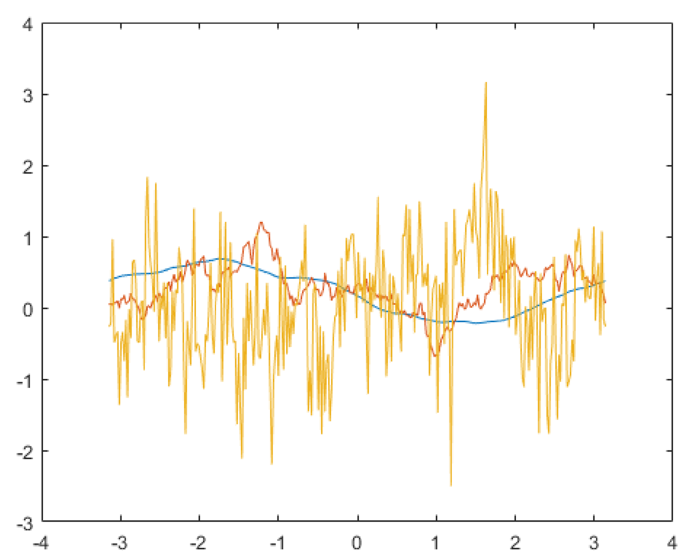


Figure 4: Funciones para $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$