

Mallado 2D del Arco I

María Cocina Sanjuanbenito, Fernando Trocoli de Toro, Rodrigo Sánchez de León y Marta Reiter Hernández

Grupo 63. Escuela Tecnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos

Introducción

En el siguiente artículo se estudia la parametrización y el mallado de una placa plana bidimensional con geometría de arco circular, delimitada por los radios 1 y 2. Sobre este dominio se definen dos magnitudes físicas: la temperatura, expresada en coordenadas cartesianas, y un campo de desplazamientos, descrito en coordenadas cilíndricas siguiendo la simetría geométrica del problema. La temperatura viene dada por

$$T(x, y) = (x - y)^2 \quad (1)$$

mientras que el campo de desplazamientos se define como

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(\rho - 1)\rho^2 \cos\theta(\vec{e}_\theta) \quad (2)$$

Masa de la placa

Teniendo en cuenta que la densidad del material viene dada por $d(\rho, \theta) = 1 + e^{\rho^2 \cos\theta}$, se calcula la masa del mismo aplicando la siguiente fórmula.

$$Masa = \int_u^u \int_v^v f(\vec{r}(u, v)) * |(\vec{r}'_u) \times (\vec{r}'_v)| du dv \quad (3)$$

De manera que la masa del material es:

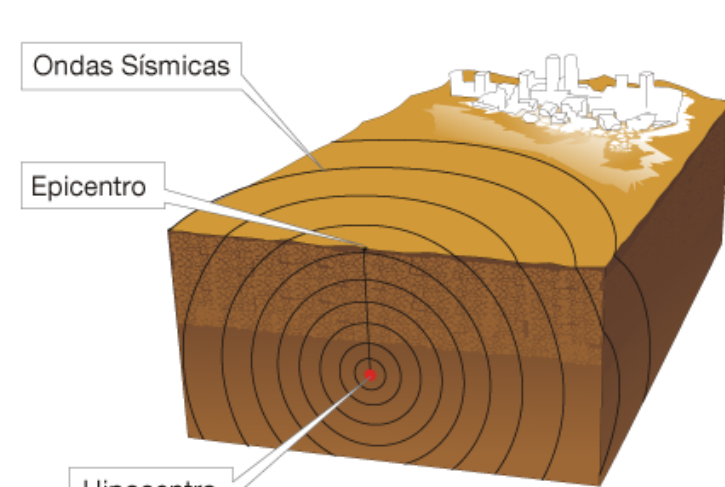
$$\begin{aligned} Masa &= \int_0^\pi \int_1^2 (1 + e^{u^2 \cos v}) \cdot u du dv \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 u du dv + \int_0^\pi \int_1^2 u e^{u^2 \cos v} du dv \\ &= \frac{3\pi}{2} + \int_0^\pi \int_1^2 u e^{u^2 \cos v} du dv \end{aligned}$$

La resolución de la integral resultante se ha aproximado a través del método del rectángulo con el siguiente código de Matlab.

Por tanto, $M = 24.64$.

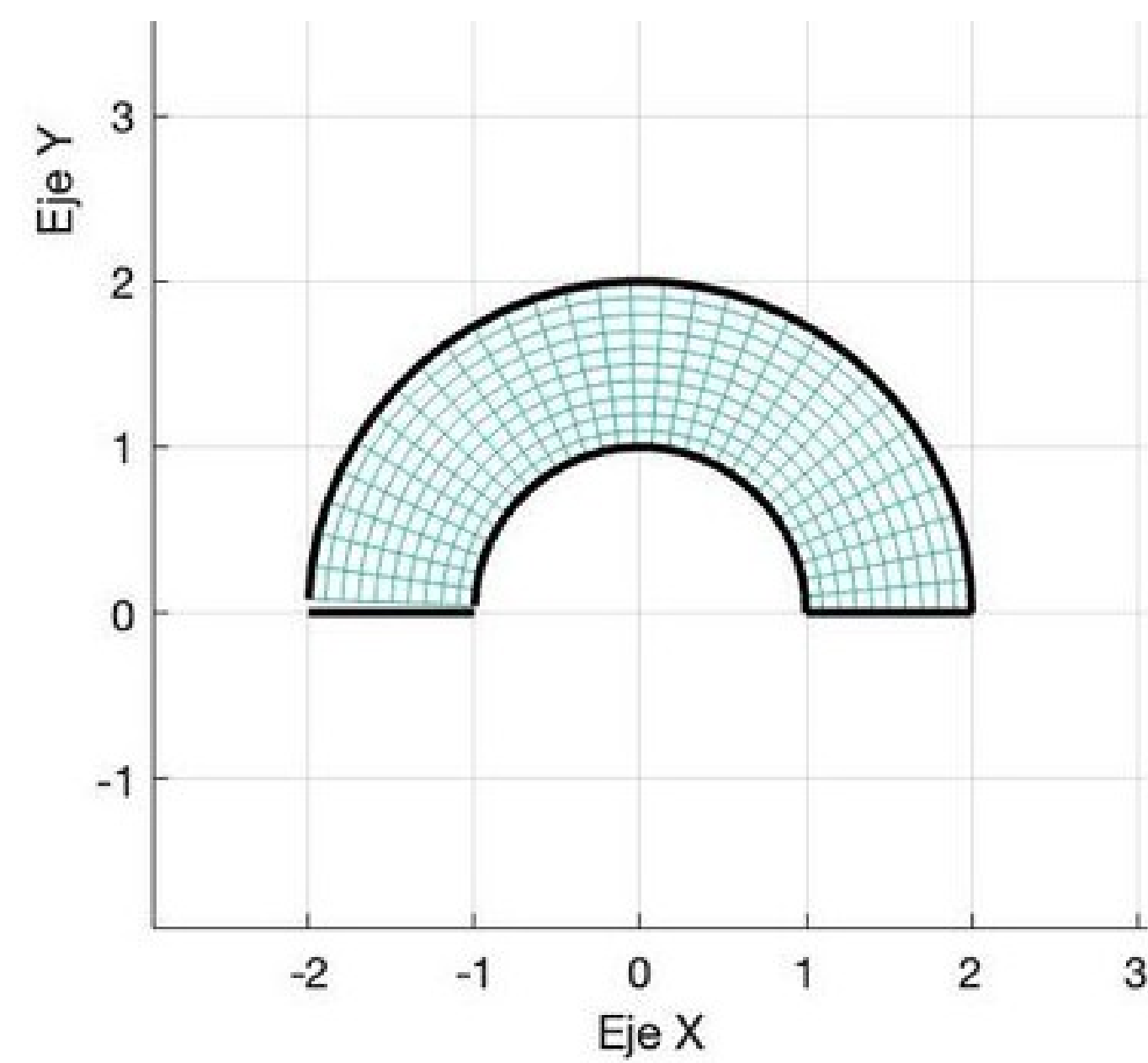
Interpretación con ejemplo práctico

Se interpreta el campo de deslizamientos como una onda sísmica S, que se propaga en parte de la corteza terrestre (arco de radios 1 y 2). Las ondas S generan desplazamientos tangenciales que producen deformaciones de cizalla. El movimiento aumenta hacia el exterior y varía con el ángulo, siendo nulo en ciertas direcciones y máximo en otras. La divergencia muestra pequeñas expansiones o compresiones, mientras que el rotacional indica zonas donde el material gira por el paso de la onda. Las tensiones normales y tangenciales reflejan las fuerzas internas que surgen en el terreno, siendo mayores donde el desplazamiento es más amplio.



Mallado

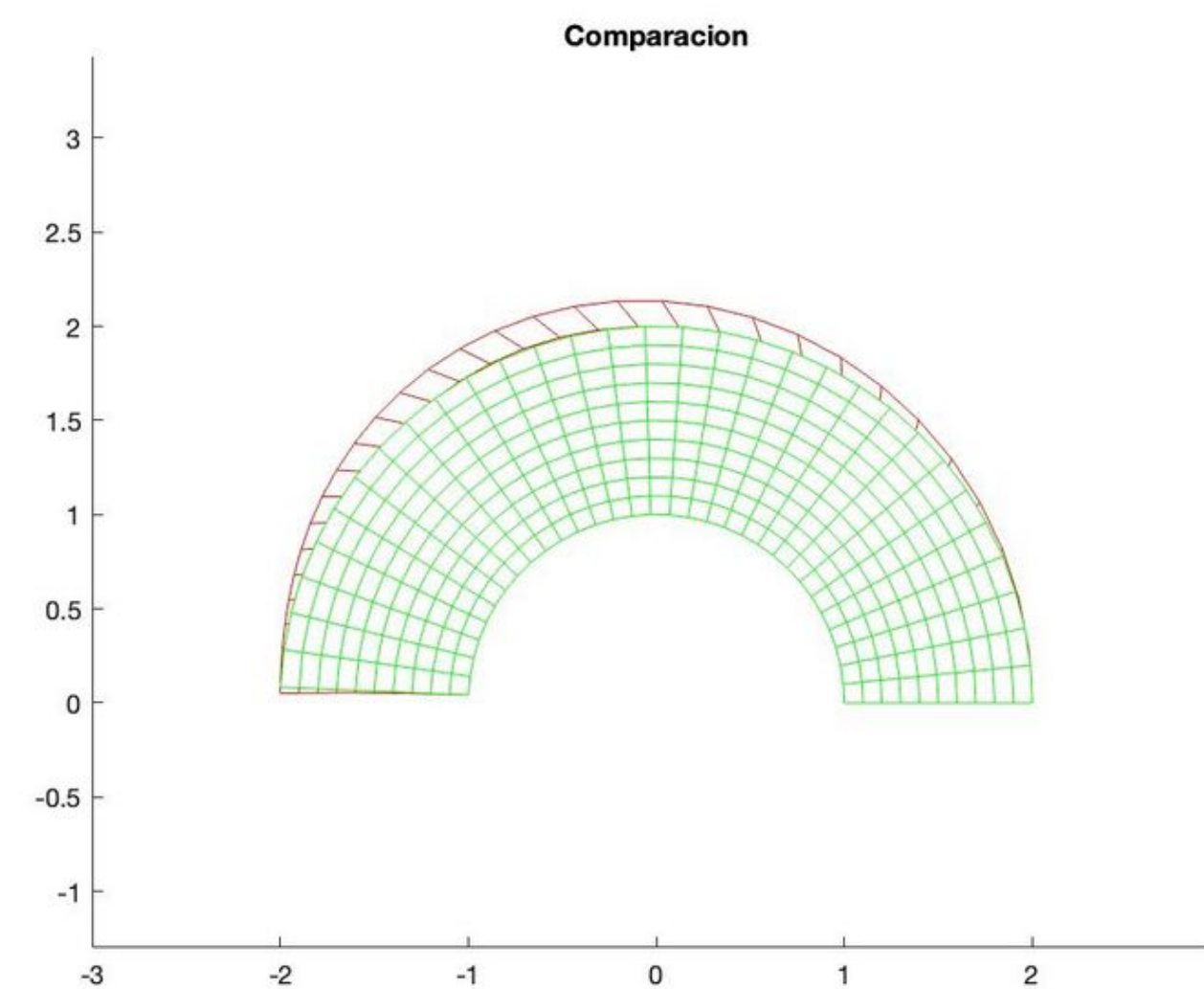
Para definir el mallado de la mitad de un anillo circular usaremos dos condiciones: que esté comprendido entre dos radios y el plano y $|x|$. Al estudiar la mitad de un anillo, trabajaremos en coordenadas cilíndricas.



Desplazamiento

Se muestra la representación del sólido antes y después de la deformación producida por el campo de desplazamientos

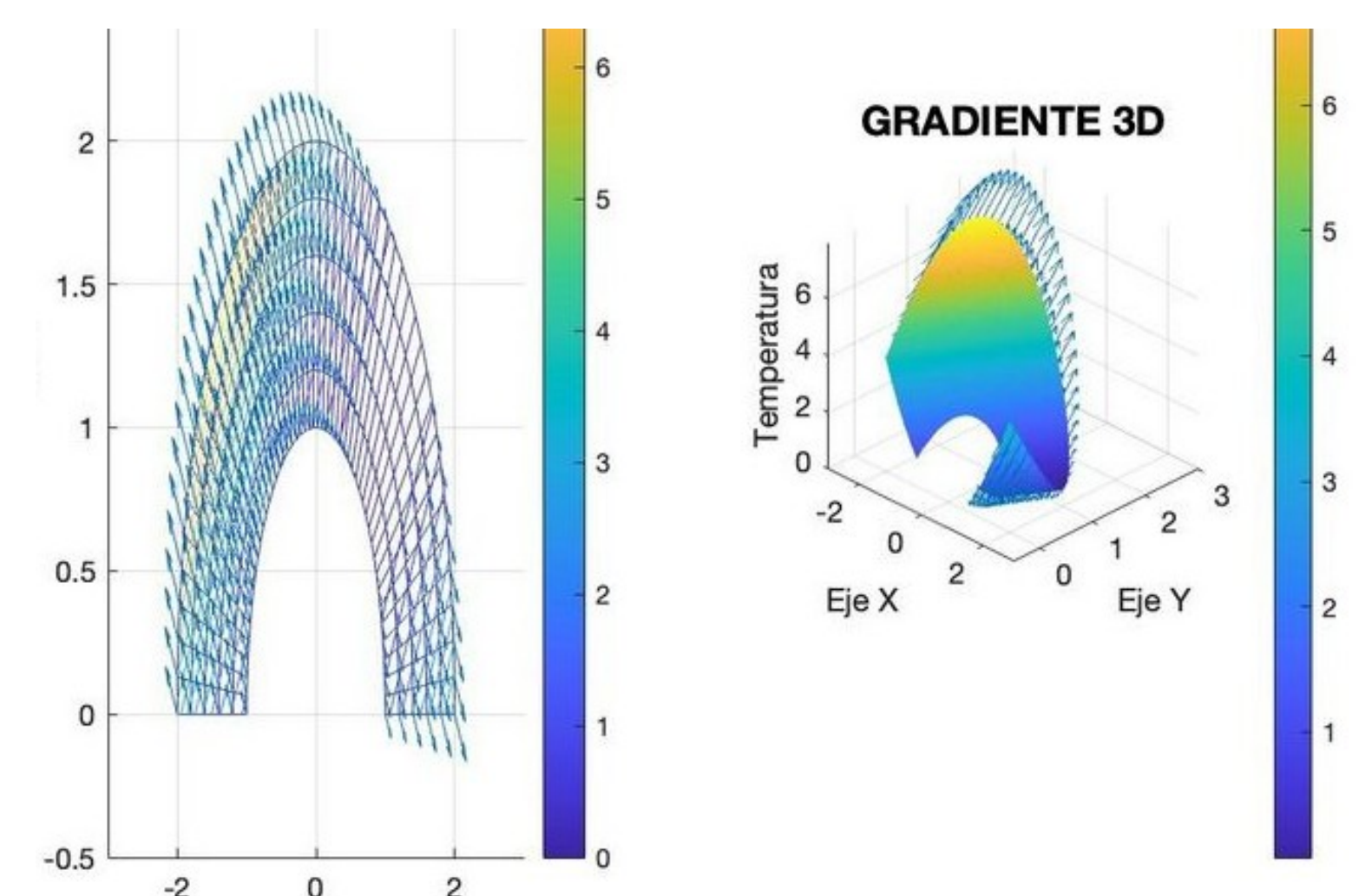
$$\vec{u}(\rho, \theta) \quad (4)$$



Gradiente

A partir del campo escalar, se calcula el gradiente de la temperatura T. Indica la dirección en la que aumenta y $|T|$ especifica cuanto aumenta.

$$T = 2(x - y)\vec{i} - 2(x - y)\vec{j} \quad (7)$$

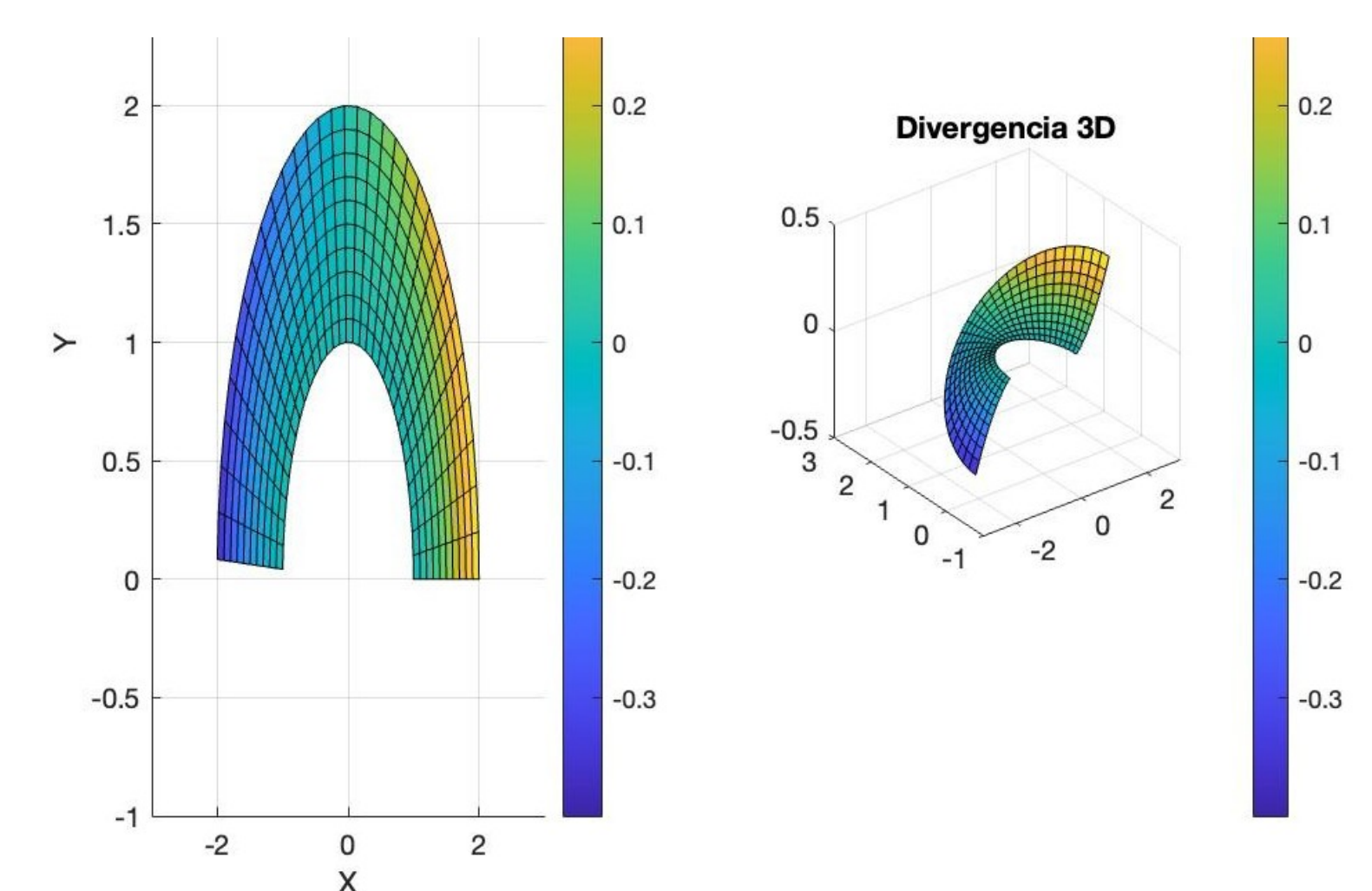


Divergencia

La divergencia mide la tasa de flujo saliente o entrante en un punto. Permite saber si un campo vectorial se comporta como "fuente" o "sumidero".

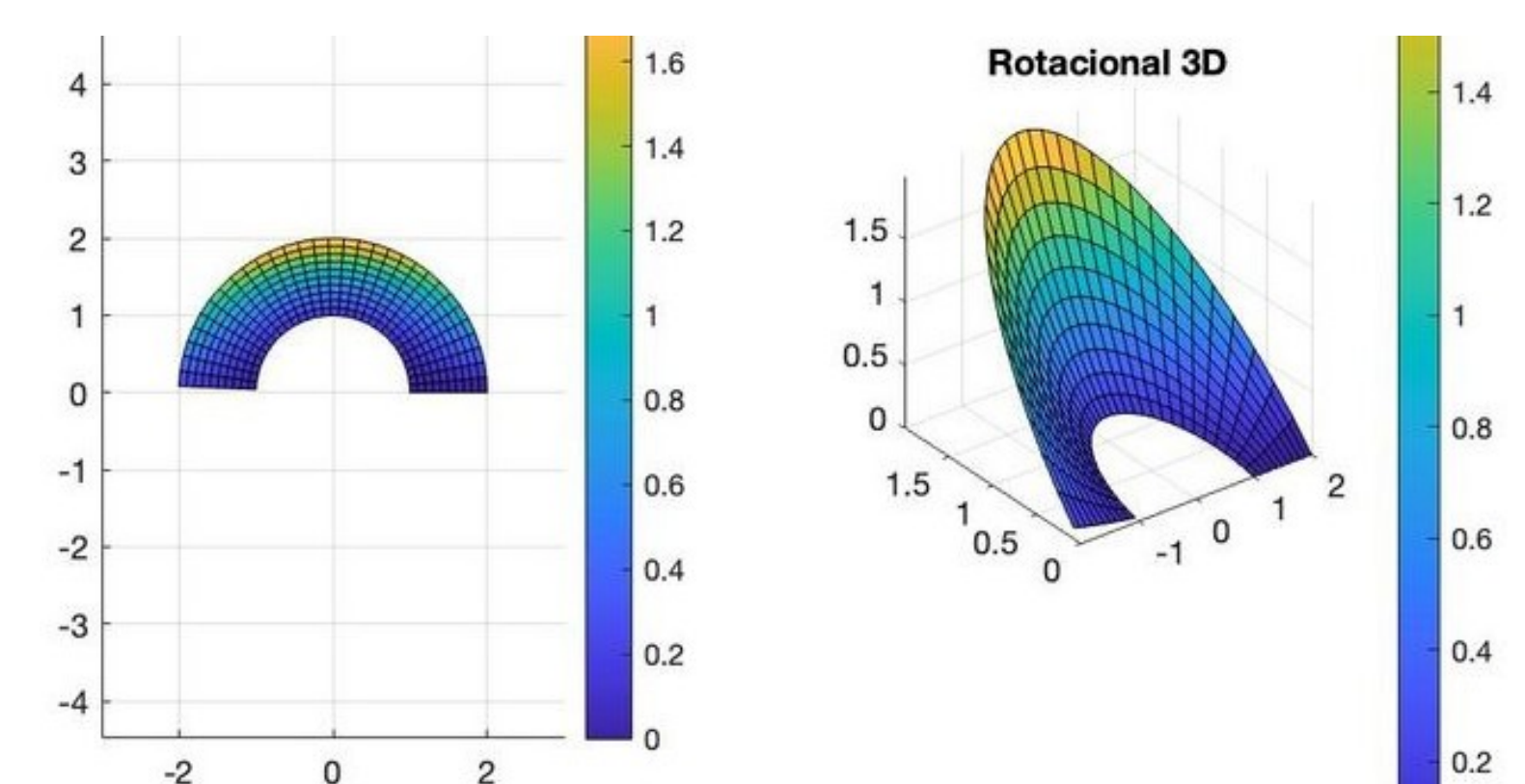
Permite saber si un campo vectorial se comporta como "fuente" o "sumidero".

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\rho(\rho - 1)\cos\theta}{5} \quad (8)$$



Rotacional

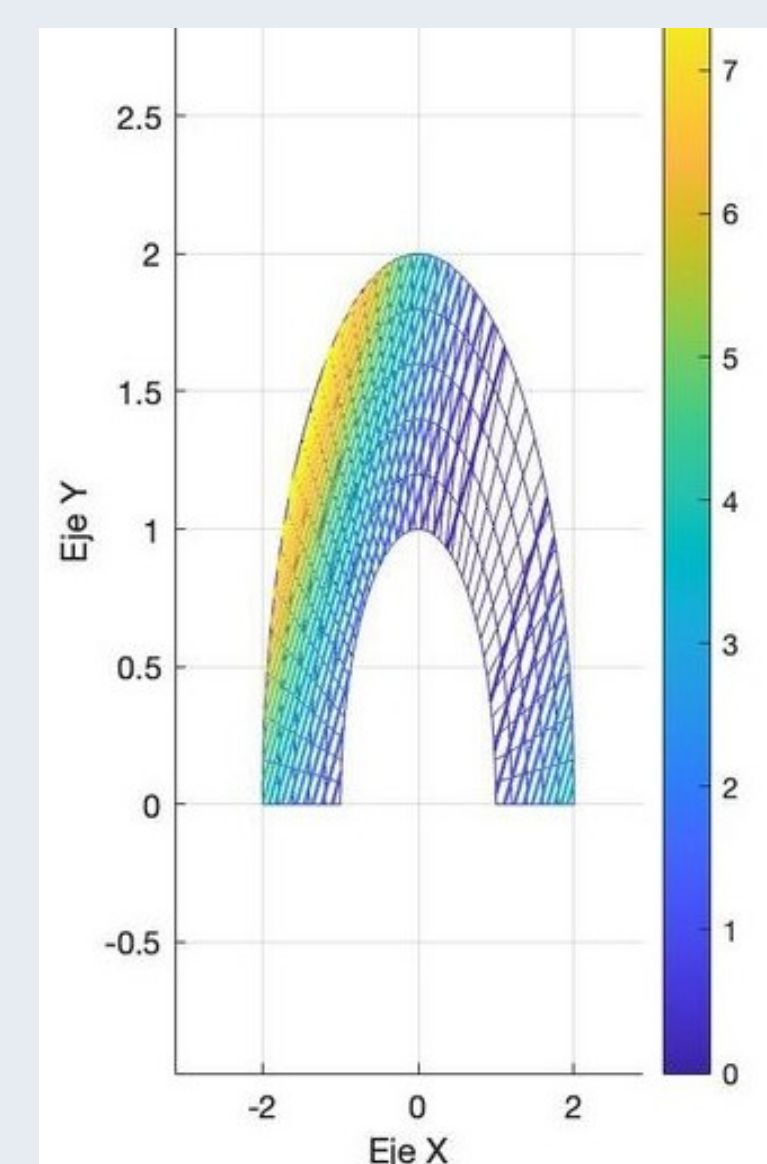
El rotacional mide la tendencia de un campo vectorial a rotar en un punto.



Curvas de nivel

La temperatura del sólido proviene de un foco de calor muy concentrado. La distribución de la temperatura en el sólido para dibujar sus curvas de nivel, viene dado por la función:

$$T(x, y) = (x - y)^2 \quad (5)$$



Tensiones

En un sólido deformable, cuando aplicamos fuerzas externas, experimenta fuerzas internas ejercidas por el propio material, que "luchan" contra esta deformación. Estas fuerzas internas se describen mediante un tensor de tensiones que en cada punto indica: cómo el resto del material impide la deformación de la fuerza externa, y en qué dirección actúan estas fuerzas.

Las tensiones se obtienen a partir de la fórmula:

$$\sigma = \nabla \cdot \vec{u}I + 2\epsilon(\vec{u}) \quad (6)$$

Tras distintos cálculos, se obtiene el tensor de deformaciones, el tensor de tensiones y por último, las tensiones normales, que dependen de la dirección que marque su eje.

Las tensiones normales son las ortogonales a la placa, las tensiones tangenciales son las que actúan dentro del plano de la placa, es decir, paralelas a ella.

Dirección de las tensiones

A continuación, se observan las tensiones según los distintos ejes; normal y tangencial.

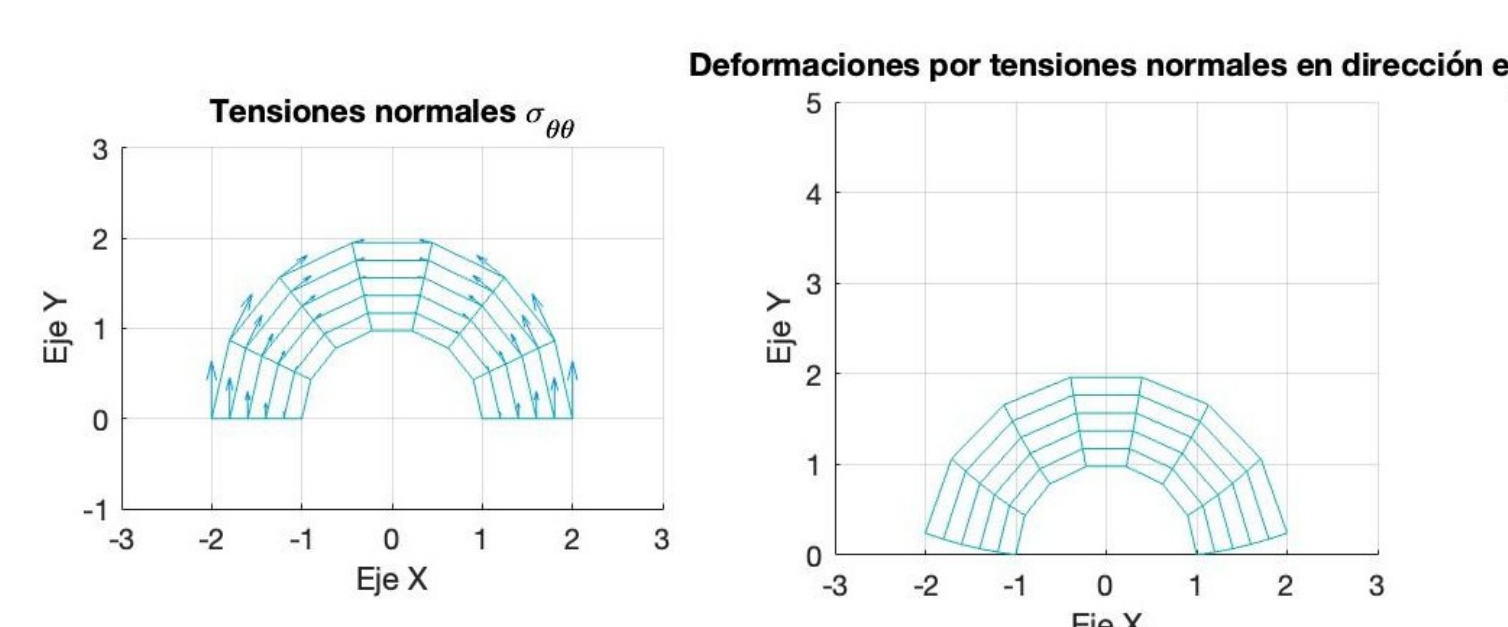


Figure 1: Tensiones según el eje normal

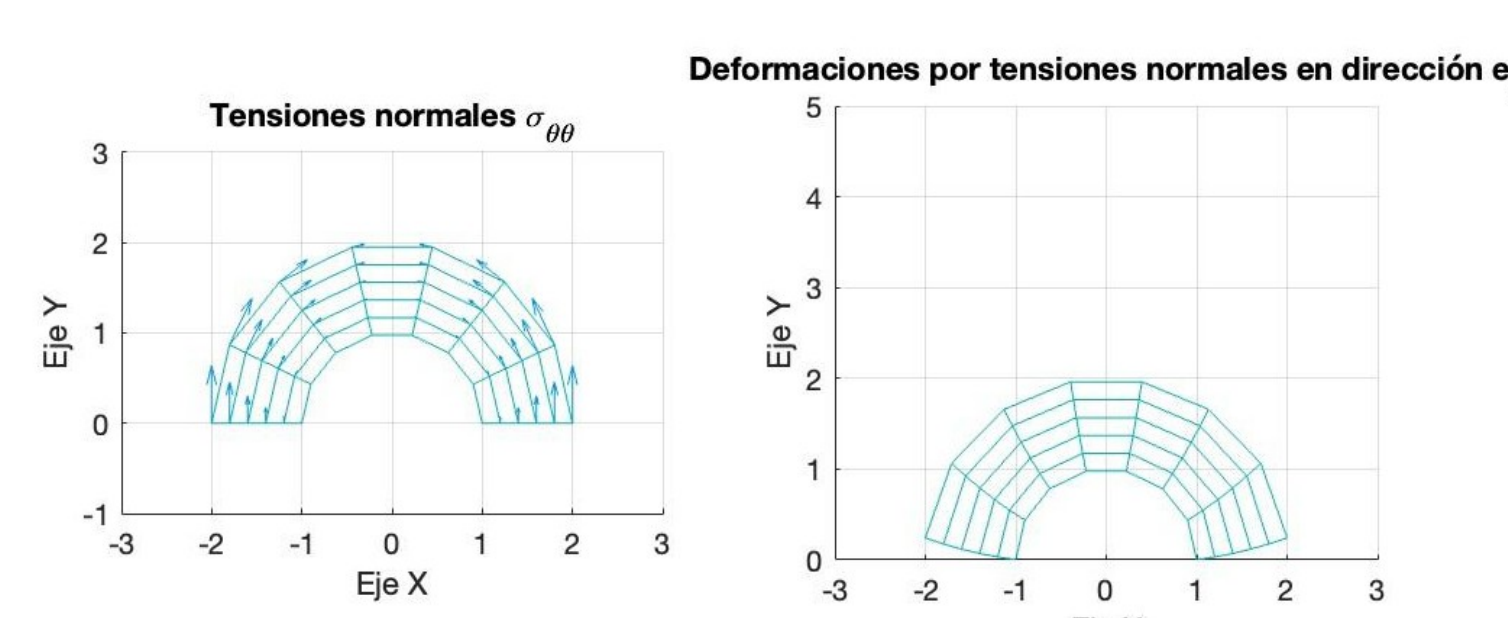


Figure 2: Tensiones según el eje tangencial

Artículo completo

