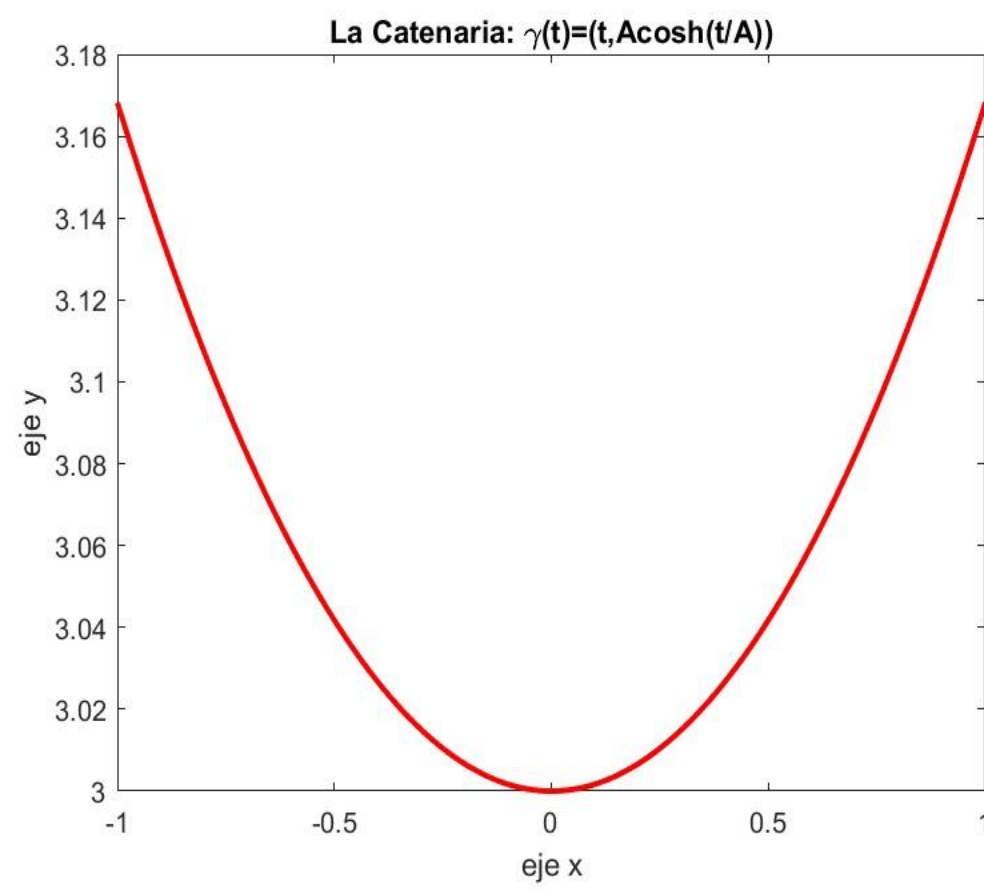


Cuando se sostiene una cuerda o cadena desde dos puntos y se deja caer el tramo intermedio, este adopta una forma curva perfecta muy característica que recibe el nombre de **catenaria**, nombre que viene de la palabra "cadena", precisamente porque se obtiene fácilmente utilizando este objeto. Esta curva es muy importante en ingeniería y arquitectura, puesto que invertida resulta ser la forma que mejor soporta su propio peso, al mantener las fuerzas en compresión. Por tanto, a lo largo de la historia, ha sido empleada numerosas veces; de ahí su importancia de estudiarla en detalle matemáticamente.

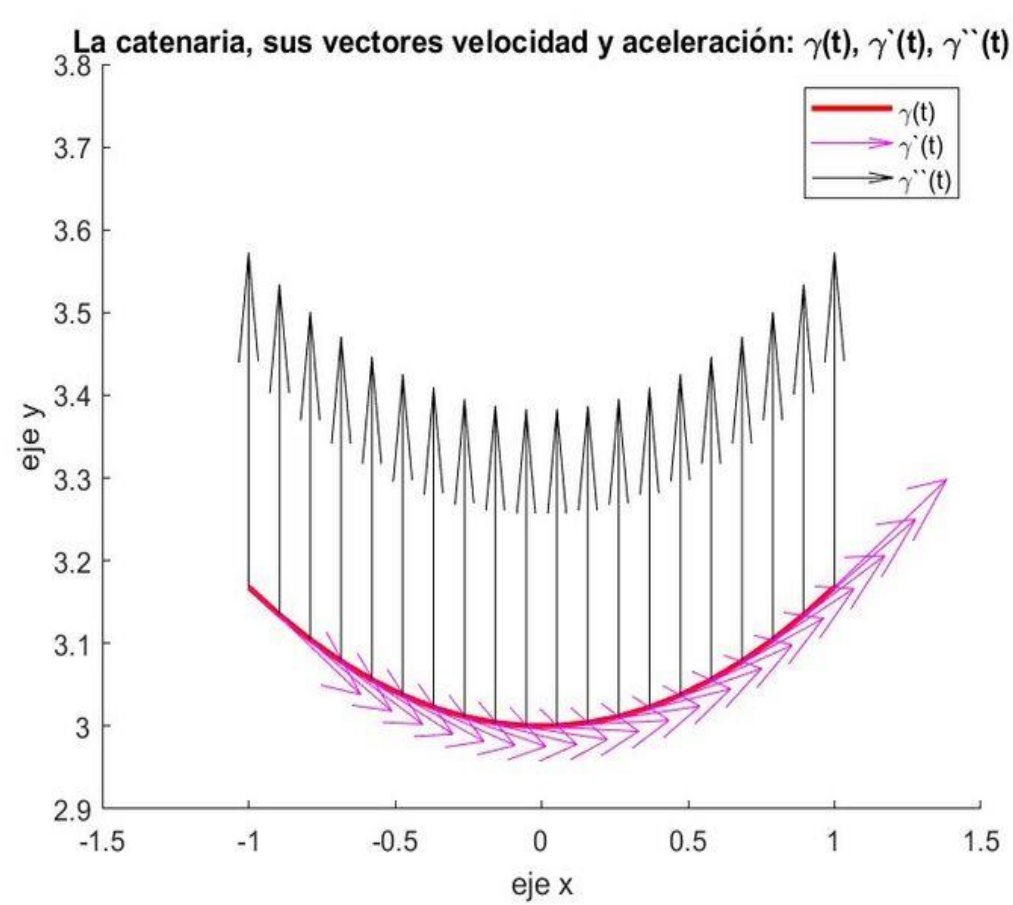
$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \left(t, A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \right),$$

$$A = 3; t \in (-1, 1)$$

1. Dibujo de la curva



2. Vectores velocidad y aceleración



Vector velocidad: $\gamma'(t) = \vec{i} + \sinh\left(\frac{t}{A}\right) \vec{j}$

Vector aceleración: $\gamma''(t) = \frac{1}{A} \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \vec{j}$

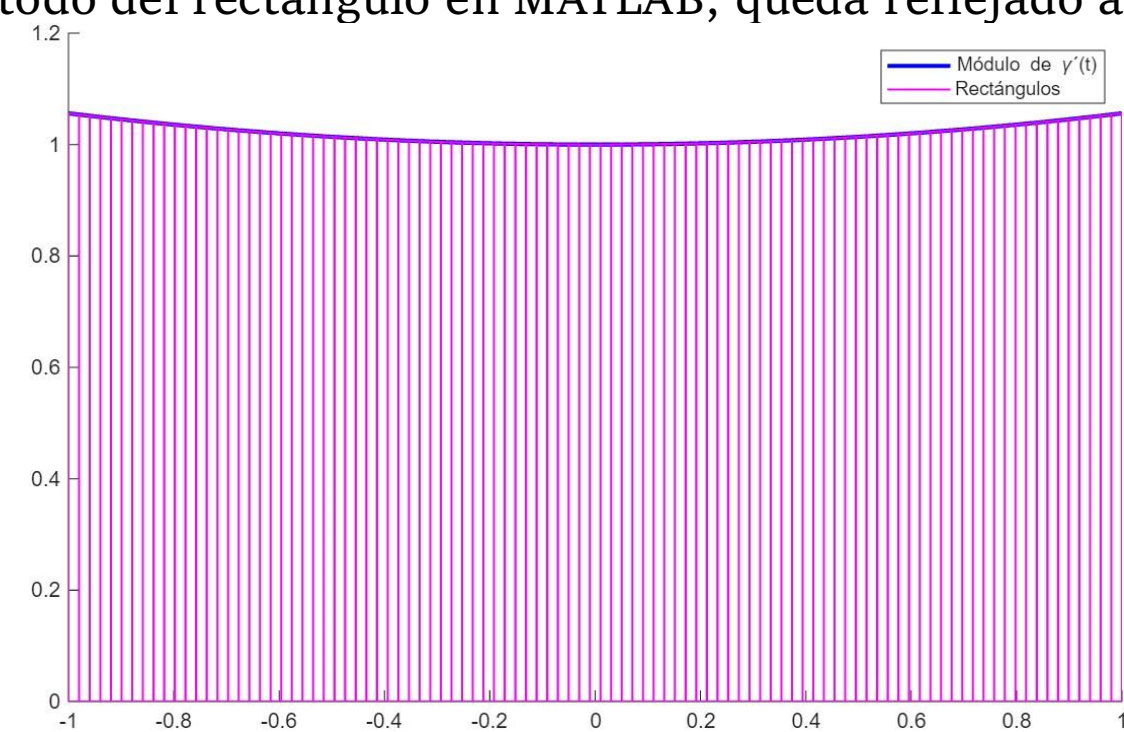
3. Longitud de la curva

Sea L la longitud de la curva; con $t \in (-1, 1)$:

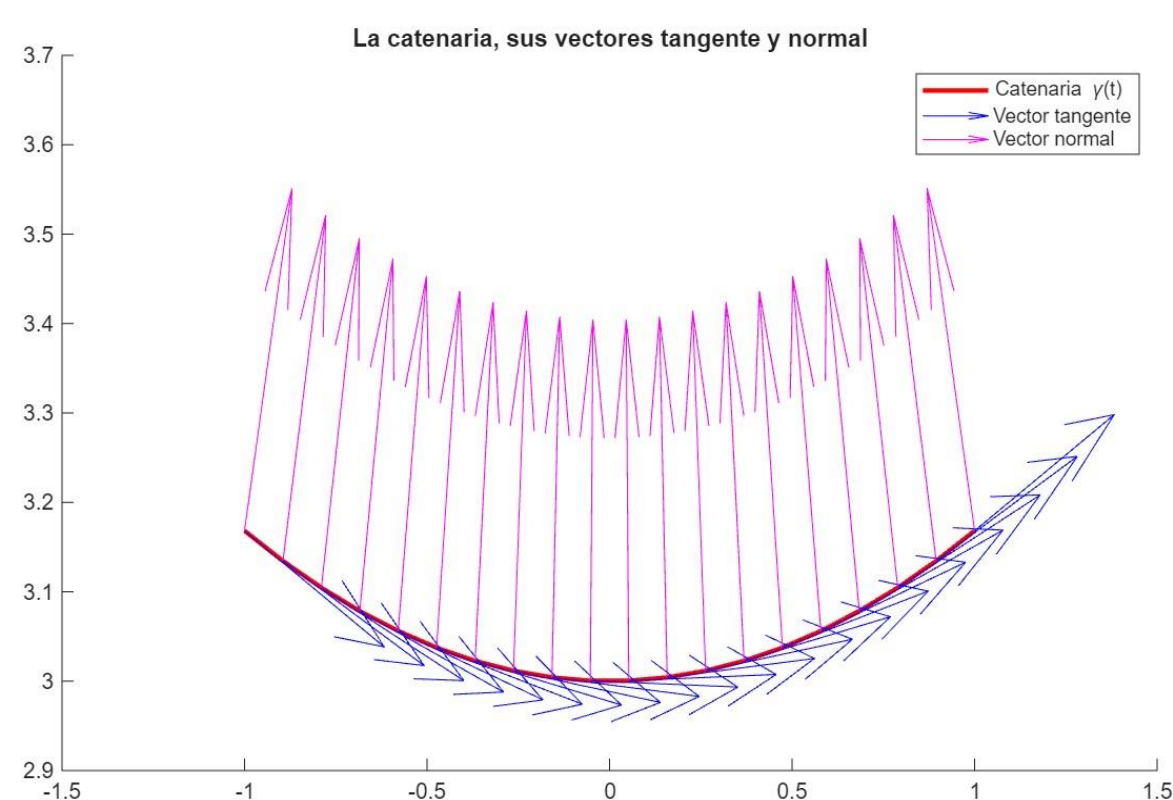
$$L = \int_{-1}^1 |\gamma'(t)| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{A}\right)} dt = \int_{-1}^1 \cosh\left(\frac{t}{A}\right) dt =$$

$$= A \left[\sinh\left(\frac{t}{A}\right) \right]_{t=-1}^{t=1} = 2A \cdot \sinh\left(\frac{1}{A}\right) \approx 2,037239 \text{ uds; con } A = 3$$

El valor de L aproximado se ha calculado empleando el método del rectángulo en MATLAB; queda reflejado aquí:



4. Vectores tangente y normal



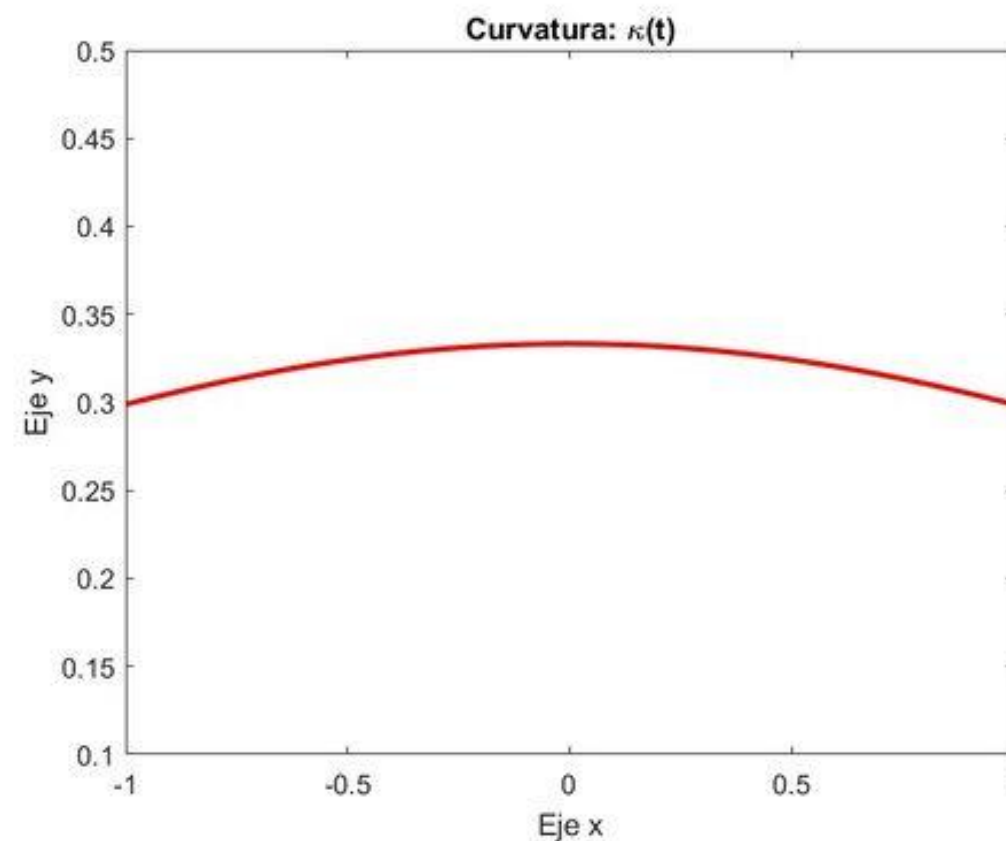
Vector tangente:

$$\vec{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\vec{i} + \sinh\left(\frac{t}{A}\right) \vec{j}}{\cosh\left(\frac{t}{A}\right)} = \text{sech}\left(\frac{t}{A}\right) \vec{i} + \tanh\left(\frac{t}{A}\right) \vec{j}$$

Vector normal:

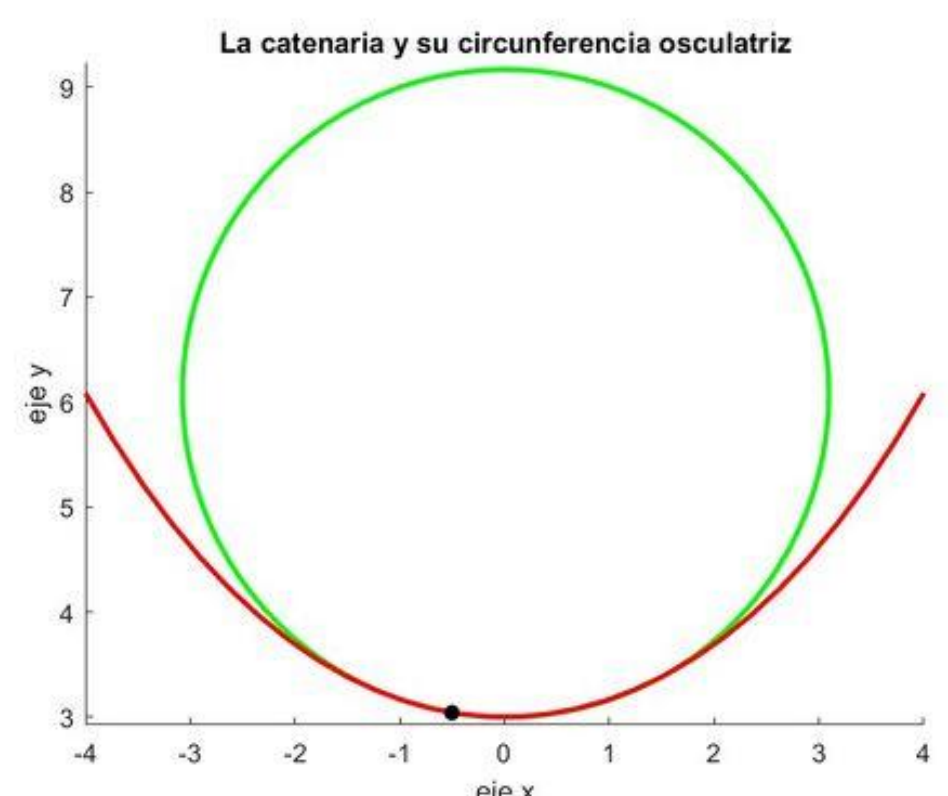
$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = -\tanh\left(\frac{t}{A}\right) \vec{i} + \text{sech}\left(\frac{t}{A}\right) \vec{j}; \vec{b}(t) = \vec{k}$$

5. Curvatura



$$\text{Curvatura: } \kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{1}{A \cosh^2\left(\frac{t}{A}\right)}$$

6. Circunferencia oscultriz en P



Sea un punto de la curva $\gamma(t_0)$ tal que $t_0 = -0,5$ y $A = 3$

- Radio de la circunferencia oscultriz:

$$\delta(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)} = \frac{3^3 \sqrt{e^2} + 6e + 3e^3 \sqrt{e}}{4e} \approx 3,08 \text{ uds.}$$

- Centro de la circunferencia oscultriz:

$$C(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \vec{n}(t_0) =$$

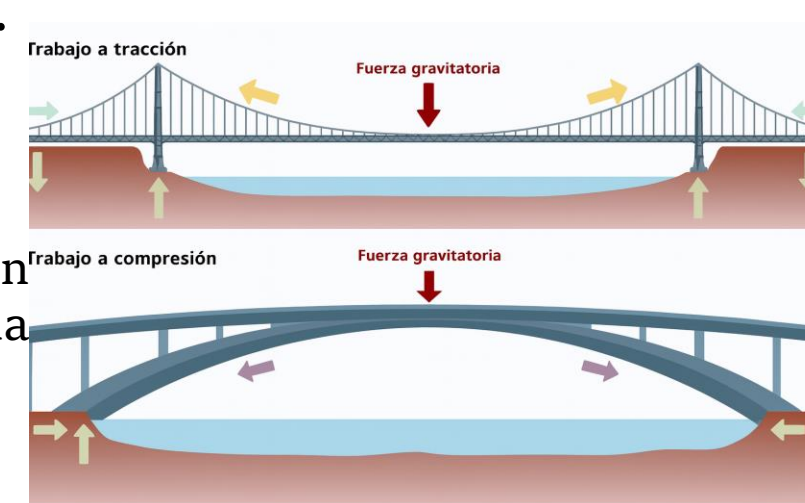
$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3^3 \sqrt{e^2} - 3e^3 \sqrt{e}}{4e}, \frac{3^6 \sqrt{e^5} + 3e^6 \sqrt{e}}{e} \right) \approx (0,0093; 6,08)$$

7. Fenómeno descrito por la curva

La catenaria es la curva que forma un cable flexible suspendido de dos puntos cuando sólo actúa la gravedad, describiendo la **búsqueda natural** de una forma de **equilibrio estable**.

En estructuras reales, el cable trabaja a **tracción** siguiendo esta geometría, mientras que un arco con forma de catenaria invertida trabaja a **compresión** de manera óptima.

Gracias a ello, la catenaria se emplea en puentes colgantes, líneas eléctricas y arcos estructurales por su **eficiencia y estabilidad**.



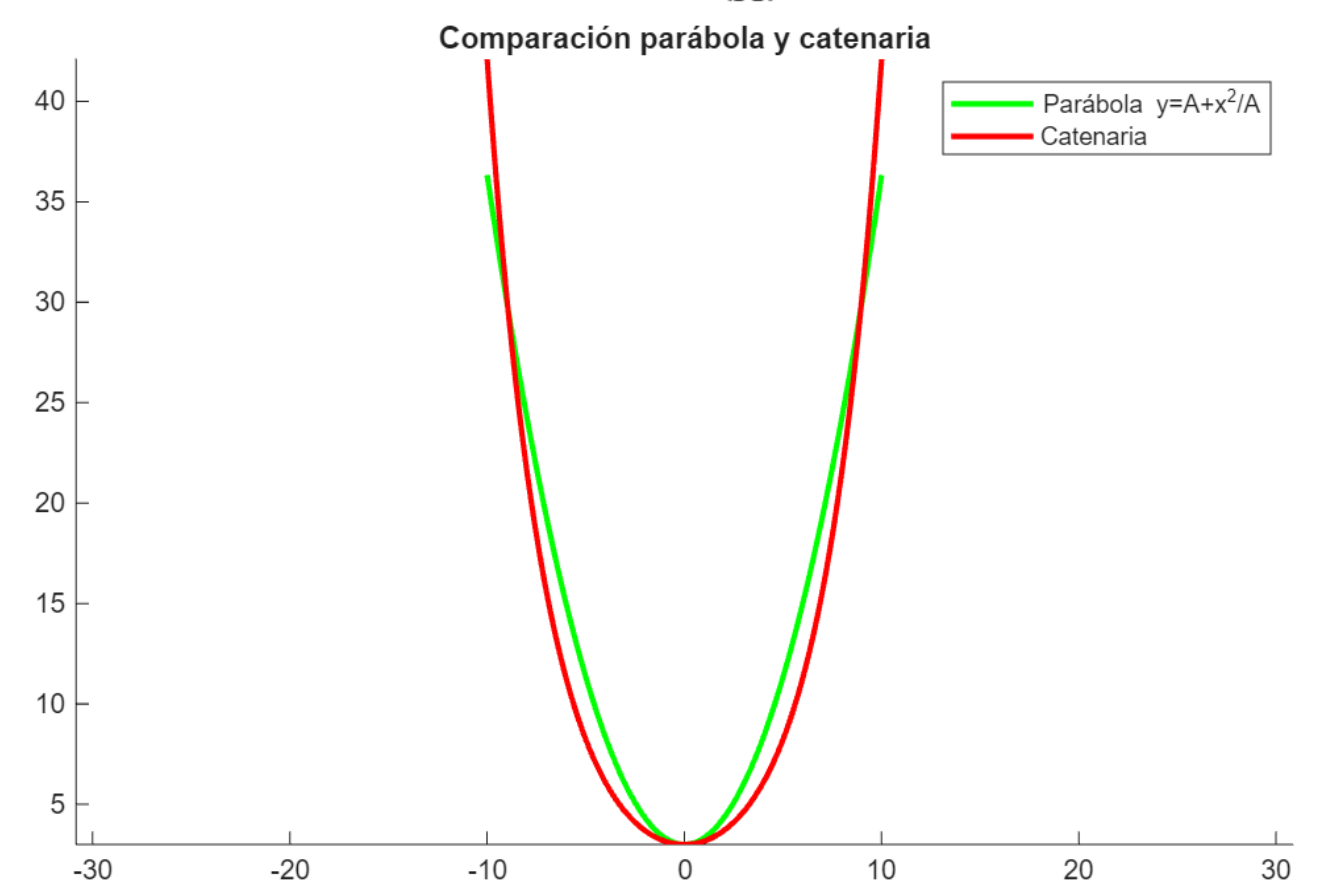
8. Ejemplos en estructuras civiles



Casa Milà, Antonio Gaudí

9. Similitud con la parábola

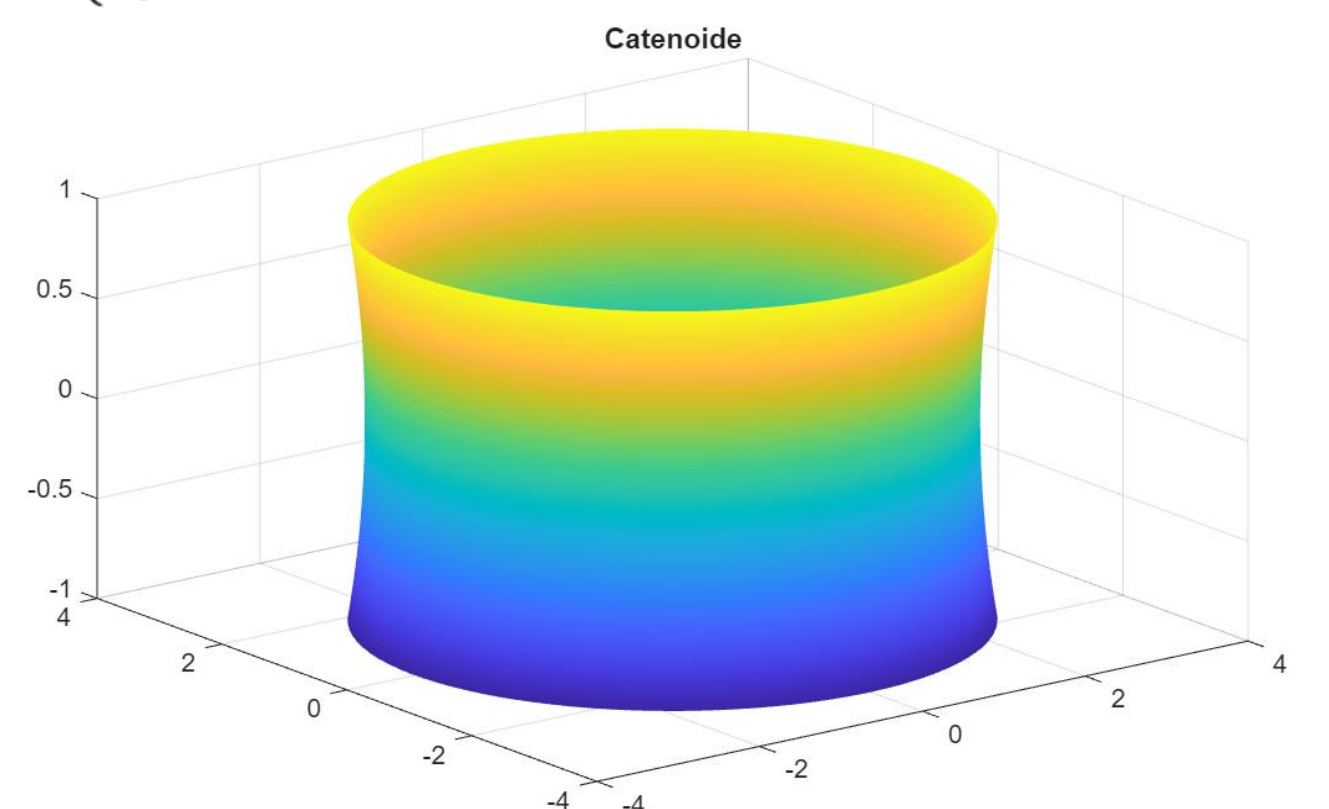
Representación de la parábola $y = A + \frac{x^2}{A}$ y la catenaria $\gamma(t) = (t, A \cosh\left(\frac{t}{A}\right))$ para $t \in (-10, 10)$.



10. El catenoide

Superficie de revolución tras haber rotado 90° la catenaria y haberla hecho girar sobre el eje z. Parametrización en cilíndricas:

$$\begin{cases} x_1 = A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \cos(\theta) \\ x_2 = A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \sin(\theta) \\ x_3 = t \end{cases}, \quad \theta \in (0, 2\pi), t \in (-1, 1)$$



11. Densidad y masa del catenoide

Función densidad en coordenadas cartesianas:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

Función densidad parametrizada según la fórmula del catenoide:

$$f(t, \theta) = \frac{t^2}{1 + A^2 \cosh^2\left(\frac{t}{A}\right)}$$

Fórmula para el cálculo de la masa M:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(t, \theta) |r_t \times r_\theta| dt d\theta$$

Cálculo del módulo del vector normal (elemento diferencial):

$$r_t = \frac{\partial r}{\partial t} = \left(\sinh\left(\frac{t}{A}\right) \cos \theta \right) \vec{i} + \left(\sinh\left(\frac{t}{A}\right) \sin \theta \right) \vec{j} + \vec{k}$$

$$r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(-A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \sin \theta \right) \vec{i} + \left(A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \cos \theta \right) \vec{j}$$

$$r_t \times r_\theta = \left(-A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \cos \theta \right) \vec{i} - \left(A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \sin \theta \right) \vec{j} + \left(A \cosh\left(\frac{t}{A}\right) \sinh\left(\frac{t}{A}\right) \right) \vec{k}$$

$$|r_t \times r_\theta| = A \cosh^2\left(\frac{t}{A}\right)$$

Resolvemos la integral con el método del rectángulo (en MATLAB), pues no es posible calcularla de manera teórica:

$$M = A \cdot 2\pi \int_{-1}^1 \frac{t^2 \cosh^2\left(\frac{t}{A}\right)}{1 + A^2 \cosh^2\left(\frac{t}{A}\right)} dt \approx 1,264569 \text{ uds; con } A = 3$$

12. Reflexiones finales

La catenaria es una curva que, a pesar de no ser especialmente compleja en lo que respecta a formación, tiene mucha **profundidad** e importancia matemática. Cálculos como su curvatura, su longitud o información acerca del catenoide nos permiten obtener **conocimientos** sobre su comportamiento o cómo **distribuye las fuerzas**. En resumen, esta curva nos muestra que detrás de las formas más simples se pueden esconder operaciones y cálculos matemáticos complejos que además, en este caso, han contribuido al progreso de la tecnología y las infraestructuras a lo largo de todo el mundo, sabiendo adaptarse a las distintas épocas y culturas.