CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER RESPECTO DE LA REGULARIDAD DE SUS FUNCIONES

Sergio Maccanin Rodríguez, Ángela Marquet Aldamiz-Echevarría, Luis Zulueta Guisasola

Universidad Politécnica Madrid

Nuestro objetivo

El objetivo de nuestro trabajo es estudiar y observar como influye la regularidad de una función en la convergencia de su serie de Fourier. Más específicamente, queremos ver la relación que hay entre la regularidad esta, es decir, su continuidad y derivabilidad, y los distintos tipos de convergencia: puntual, uniforme, norma en $L^2([-\pi,\pi])$, siendo $[-\pi,\pi]$ el dominio de definición de la función.
Para ello, comenzaremos por analizar las condiciones bajo las cuales se produce la convergencia de las series de Fourier. Para posteriormente, ejemplificar estos casos con tres funciones, de distintos tipos de regularidad y convergencia, dibujando tanto estas como sus series de Fourier para posteriormente observar el error de aproximación obtenido de la comparación.

Convergencia en L^2

Sea f una función de cuadrado integrable, es decir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

sabemos que su serie de Fourier tiene convergencia en norma L^2. Lo que implica que la distancia en casi todo punto de f y la sumas parciales de su serie es cero, cuando n tiende a infinito.
No obstante, esta es una convergencia muy débil, ya que, podríamos tener error infinito cuando hagamos uno a uno la diferencia entre f y su serie de Fourier.

Convergencia puntual

Sea f una función continua en todo intervalo de longitud 2π, salvo en un número finito de discontinuidades de salto, monótona y acotada. En dichas discontinuidades el valor de la serie de Fourier coincide con el promedio entre el límite lateral izquierdo y el límite lateral derecho.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Toda función que satisfaga estas condiciones se denomina función continua a trozos y tiene una serie de Fourier que converge puntualmente a $f(x)$, donde esta es continua, y donde no lo es dicha serie tomará el valor del promedio explicado.

Convergencia uniforme

El método más sencillo para estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones es mediante el Teorema de Weierstrass. Este indica que dada una serie de funciones, si se pueden mayorar estas mediante una constante, distinta para cada función, de forma que la serie de dicha constante sea convergente, entonces la serie de la función converge de manera uniforme.
Además, si f es una función continua y C^1 a trozos en un intervalo, es decir, derivable salvo en un número finito de puntos, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f.

Desarrollo

Primero hemos aproximado la función $f(x) = x$ para observar como varía la serie de Fourier de nuestra función f dependiendo de n. Refiriéndonos a la gráfica, podemos observar que las funciones de color más cálido son las que más términos tiene y queremos ver si aproximan mejor la función.

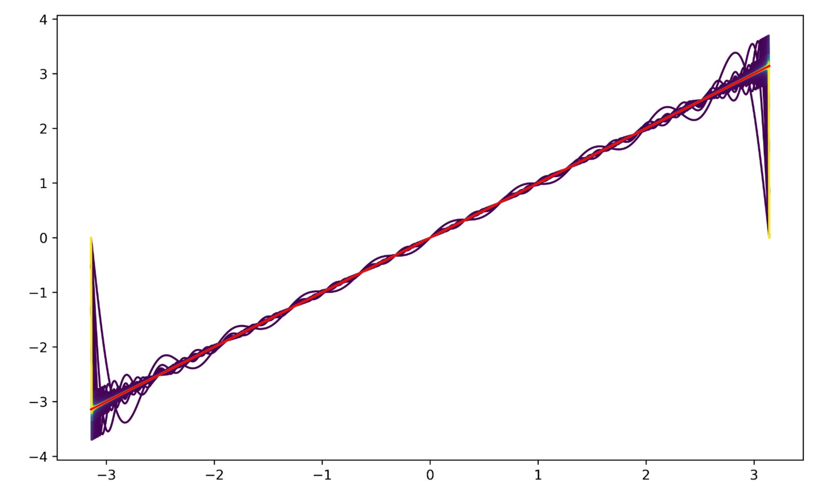


Fig. 1: Sumas parciales de la serie de Fourier de $f(x) = x$

A continuación procedemos a graficar la diferencia entre las sumas parciales de las serie de Fourier y la propia f, obteniendo así la siguiente gráfica del error.

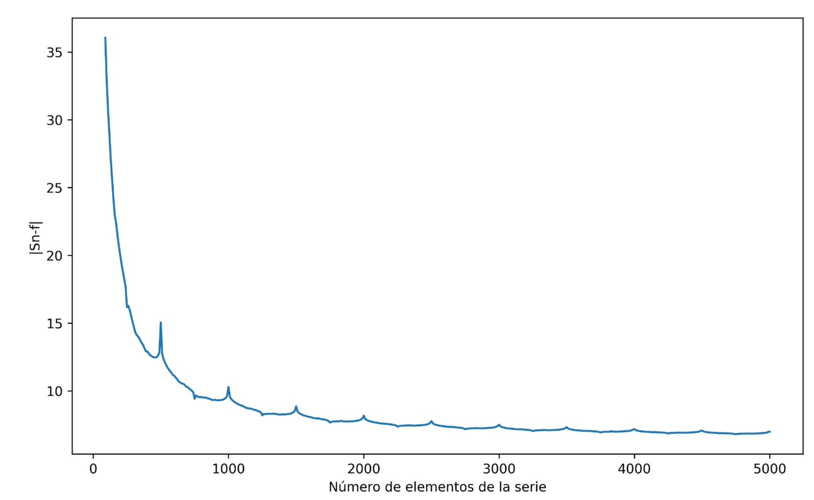


Fig. 2: Gráfica del error

En esta gráfica podemos apreciar que cuanto más grande es la n el error es menor y por tanto la serie de Fourier aproxima mejor a f.

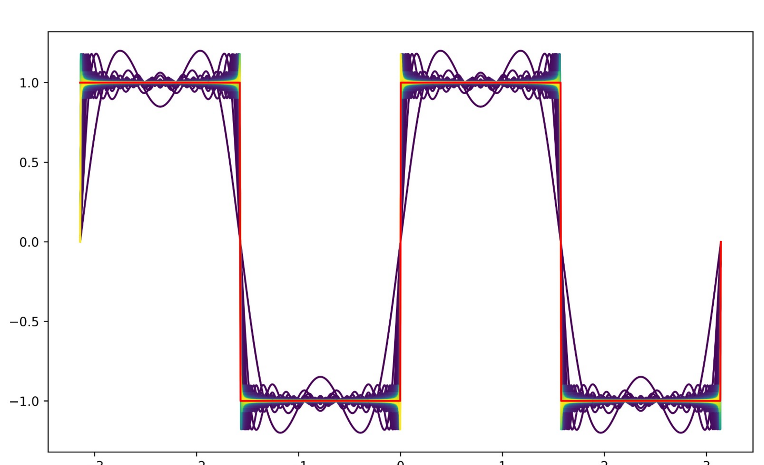
Antes hemos hablado de las distintas formas de convergencia, por lo que vamos a comparar numéricamente el error que comete una serie que tiene convergencia puntual en casi todo punto y otra función que converge uniformemente. Para el caso de convergencia puntual, hemos elegido la función continua a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [0, \frac{\pi}{2}], \\ -1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

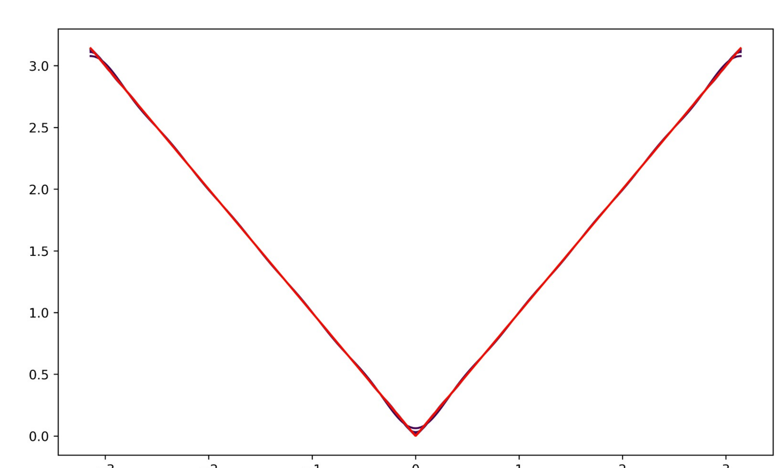
Y para el caso de convergencia uniforme, la función continua y C^1 a trozos:

$$h(x) = |x|$$

Como en el primer caso, vamos a graficar la función junto con su serie de Fourier, para posteriormente observar el error de aproximación.



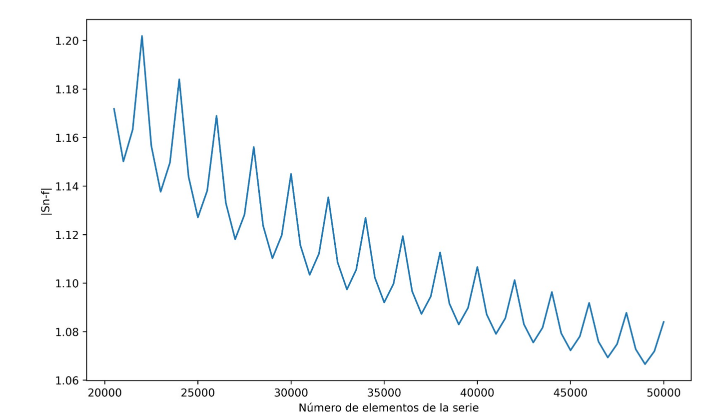
Sumas parciales de la serie de Fourier de $g(x)$



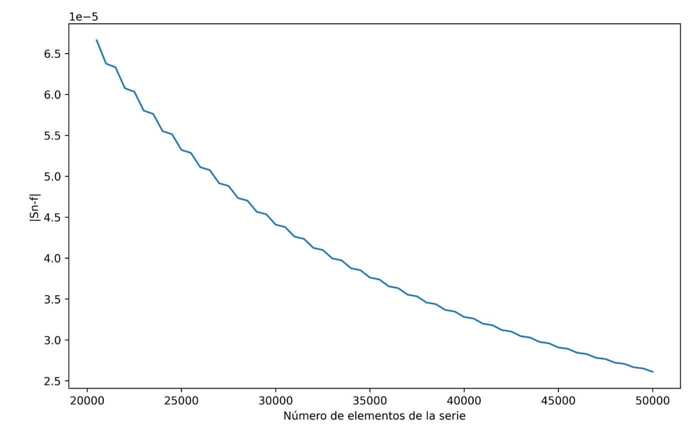
Sumas parciales de la serie de Fourier de $h(x)$

Desarrollo (continuación)

Como podemos observar las sumas parciales de la serie de Fourier de $h(x)$, se asemejan mucho a $h(x)$, tanto es así que en la gráfica percibir la diferencia entre estas es realmente complicado. En cambio, en el caso de $g(x)$ (función a trozos con convergencia puntual) su aproximación por series de Fourier es bastante peor. Por último, tal y como hemos mencionado antes, vamos a graficar el error que se produce al aproximar cada función respectivamente por su serie de Fourier.



Error cometido por la aproximación de la serie de Fourier de $g(x)$.



Error cometido por la aproximación de la serie de Fourier de $h(x)$

En la primera gráfica el error es de alrededor de uno, es decir bastante grande, incluso cuando las iteraciones crecen mucho, por lo que podemos decir que parece que este error no tiende a ser menor que uno.
Para la segunda gráfica, cabe destacar que se ha utilizado una escala de 10^{-5}, para poder observar bien el comportamiento del error. En este caso podemos ver como este es mucho menor y disminuye considerablemente a medida que suben el número de iteraciones.

Conclusión

Con este trabajo hemos podido observar que existe una relación directa entre la regularidad de una función y la naturaleza de la convergencia de su serie de Fourier, demostrando con ejemplos que mayores niveles de suavidad implican mejores propiedades de convergencia y menor error de aproximación.

Bibliografía

1- Convergencia de series de Fourier, Javier Canto Llorente, UPV/EHU, Junio 2016
2- 1B Methods lecture notes: Part I: Fourier Series, self adjoint ODEs, Richard Jozsa, DAMTP Cambridge, Octubre 2013

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID