

Objetivos

En este trabajo vamos a hablar sobre la función fundamental del calor a la vez que de su carácter autosemejante, además de su relación con la delta de Dirac y ver si estas dos funciones convergen o no, en L_2 , L_1 y el espacio de funciones generadoras.

La solución fundamental

Como bien hemos visto en clase la solución fundamental del calor cuando tratamos el problema no acotado en una dimensión es:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

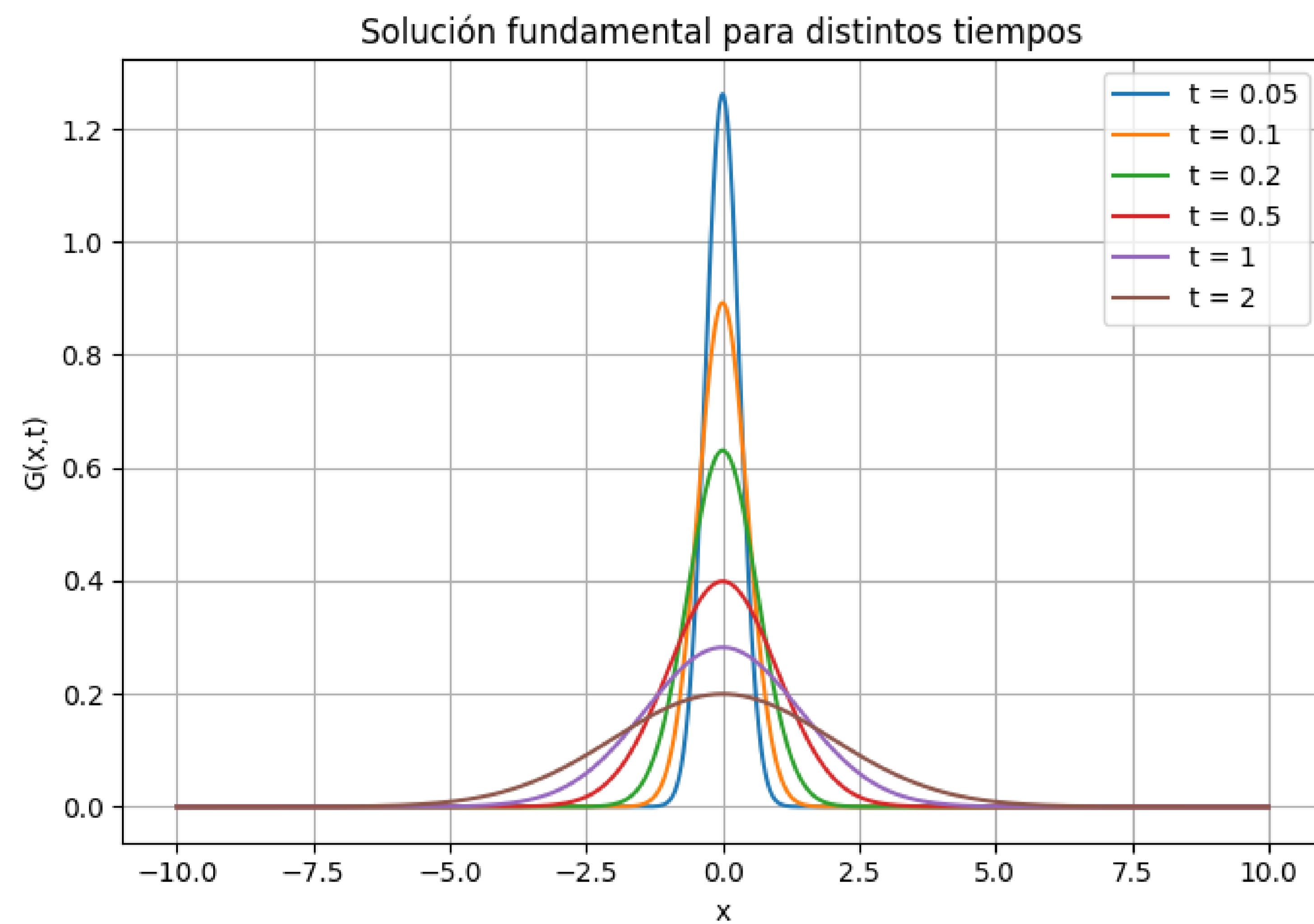


Figura 1: Solución fundamental en distintos tiempos

Como podemos ver esta función no es más que una campana de Gauss, la cual conforme va pasando el tiempo se va estrechando.

Ahora vamos a escribir esta función de una forma un poco distinta, sea $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Se ve ahora claramente que,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Entonces sean $t' > t > 0$ dos tiempos distintos, haciendo el cambio de variable $y = x\frac{\sqrt{t'}}{\sqrt{t}}$ a la función $u(x, t')$ y haciendo la cuenta vemos que,

$$u(y, t') = \frac{1}{\sqrt{t'}} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t'}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t'}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Es decir,

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t'}} u(y, t') = \frac{1}{\sqrt{t}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = u(x, t)$$

Por lo tanto vemos que la solución del calor en dos tiempos distintos es idéntica, si hacemos una contracción del x por un factor de $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t'}}$

y una dilatación del eje y por un factor de $\frac{\sqrt{t'}}{\sqrt{t}}$.

Convergencia de la delta de Dirac

Definición:

La delta de Dirac en 0, denotada por δ_0 , es la distribución definida

por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x) \varphi(x) dx = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Otra forma de definirla es la que hicimos en clase:

$$\delta_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= 0 & x \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \infty & x = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx &= 1 & \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Imposibilidad de convergencia en L^2 :

La solución fundamental de la ecuación del calor no puede converger a δ_0 en $L^2(\mathbb{R})$, ya que δ_0 no es una función perteneciente a estos espacios.

Por ejemplo, sea

$$g_n(x) = n \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

entonces $\delta_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ es una delta de Dirac por la segunda definición.

Si calculamos la norma de $g_n(x)$ vemos que

$$\|g_n(x)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_n^2(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 \left(\frac{1}{n}\right) = n$$

Por lo tanto,

$$\|\delta_0(x)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(x)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Es decir $\delta_0(x)$ ni si quiera pertenece a L^2 por lo tanto es imposible que una función en L^2 converja a ella.

Imposibilidad de convergencia en L^1 :

Para ver que tampoco puede converger en el sentido L^1 vamos a ver que tampoco pertenece a este, en L^1 toda función f que es 0 en casi todo punto cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} f = 0$. Pero esto no es cierto en el caso de la delta, si hacemos,

$$\langle \delta_0, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x) dx = 1$$

Como acabamos de ver su integral en \mathbb{R} es 1 pero sabemos que es 0 en casi todo punto por lo tanto, es imposible que pertenezca a L^1 .

Definición (Convergencia en distribuciones):

Decimos que una familia T_t converge a una distribución T si

$$\langle T_t, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} T_t \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} T \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Vamos a comprobar que sin embargo, la solución fundamental si converge a la delta de Dirac en distribución, es decir:

$$u(\cdot, t) \rightarrow \delta_0 \quad \text{en el sentido de distribuciones.}$$

Demostración:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \varphi(x) dx.$$

Haciendo el cambio $x = \sqrt{t} y$,

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{t} y) dy.$$

Como $\varphi(\sqrt{t} y) \rightarrow \varphi(0)$ cuando $t \rightarrow 0$ y

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{t} y) \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R}),$$

por el teorema de convergencia dominada,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/4} dy = \varphi(0).$$

Por tanto,

$$u(\cdot, t) \rightarrow \delta_0 \quad \text{en distribuciones.}$$

Decaimiento de la solución fundamental

Fijado $x \in \mathbb{R}$, cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \rightarrow 0, \quad \text{mientras que} \quad e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow 1.$$

Por tanto, la solución fundamental viene dada por un producto en el que el factor dominante es $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$, que tiende a cero.

Además, a medida que t crece, la función se va ensanchando (su varianza aumenta), mientras que su valor máximo decrece. En consecuencia, la solución fundamental converge puntualmente a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Este comportamiento se puede apreciar visualmente en la gráfica mostrada en la primera sección.