

DEFINICIÓN

Las coordenadas cilíndricas parabólicas destacan por su **ortogonalidad** y eficiencia en problemas físicos de contorno, como la difracción o el potencial electrostático. Este sistema generaliza las coordenadas planas al espacio tridimensional transformando las cartesianas mediante las siguientes expresiones:

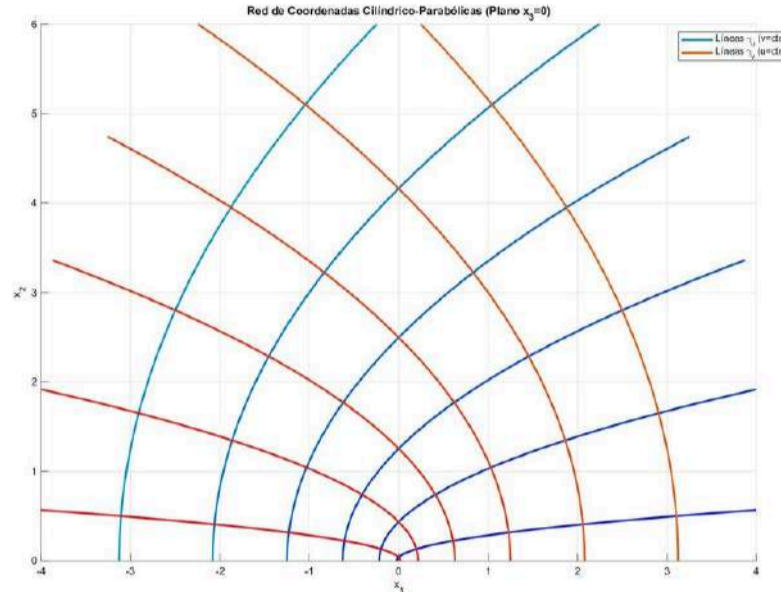
$$\begin{cases} x_1 = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ x_2 = uv \\ x_3 = v \end{cases}$$

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y VECTORIAL

Parametrización y geometría de líneas coordenadas.

Se deducen las siguientes parametrizaciones para las **líneas coordenadas**:

- Línea coordenada γ_u : $\gamma_u(t): (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{t^2 - v^2}{2}, tv, z\right)$
- Línea coordenada γ_v : $\gamma_v(t): (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - t^2}{2}, ut, z\right)$
- Línea coordenada γ_z : $\gamma_z(t): (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2}, uv, t\right)$



Cálculos teóricos

Se derivan las componentes del campo de posición $\vec{r}(u, v, z) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2}, uv, z\right)$ respecto a cada coordenada para obtener los **campos de velocidad**:

$$\gamma'_u = (u, v, 0); \quad \gamma'_v = (-v, u, 0); \quad \gamma'_z = (0, 0, 1)$$

Los **factores de escala** son los módulos:

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad h_z = 1$$

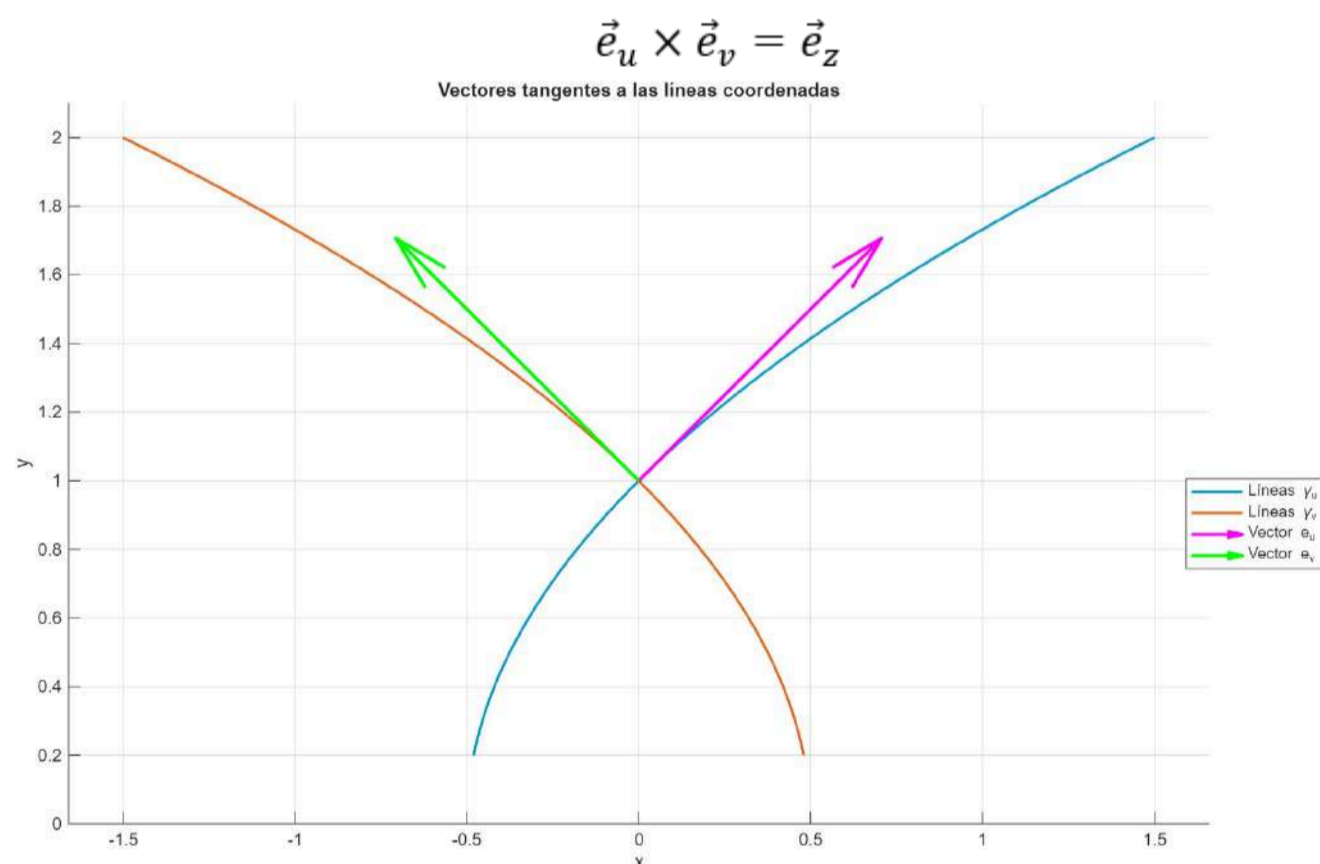
Normalizando los campos de velocidad se obtienen los **vectores tangentes unitarios**:

$$\vec{e}_u = \frac{\gamma'_u}{h_u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(u, v, 0); \quad \vec{e}_v = \frac{\gamma'_v}{h_v} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2}}(-v, u, 0); \quad \vec{e}_z = \frac{\gamma'_z}{h_z} = (0, 0, 1)$$

Se obtiene una **base ortonormal**, ya que:

$$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \vec{e}_u \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_z = 0; \quad |\vec{e}_u| = |\vec{e}_v| = |\vec{e}_z| = 1$$

Además, la base está **orientada positivamente** ya que:



MATRIZ CAMBIO DE BASE Y CAMPO DE POSICIÓN

Matriz Cambio de base

La **matriz Q** transforma las coordenadas de la base cilíndrica parabólica $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z\}$ a la del sistema cartesiano $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}} & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La **matriz Q⁻¹** transforma las coordenadas de la base cartesiana $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a la del sistema cilíndrico parabólico $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z\}$.

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Campo de posición

$$\vec{r}_{[CilindricasParabólicas]} = Q^{-1} * \vec{r}_{[Cartesianas]} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ -v & u & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u^2 + v^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{u^2 - v^2}{2} \\ uv \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u^3 + uv^2}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{u^2v + v^3}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \\ z \end{bmatrix}$$

La **forma vectorial** del campo de posición de las cilíndricas parabólicas:

$$\vec{r}_{[CilindricasParabólicas]} = \frac{u^3 + uv^2}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{e}_u + \frac{u^2v + v^3}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{e}_v + z \vec{e}_z$$

OPERADORES DIFERENCIALES

Los operadores **gradiente**, **divergencia** y **rotacional** de un campo vectorial \vec{F} en coordenadas cilíndrico-parabólicas se calcula particularizando en las siguientes fórmulas:

$$\nabla = \frac{e_u}{h_u} \frac{\partial}{\partial x_u} + \frac{e_v}{h_v} \frac{\partial}{\partial x_v} + \frac{e_z}{h_z} \frac{\partial}{\partial x_z}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_z F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_z F_v) + \frac{\partial}{\partial z} (h_u h_v F_z) \right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z} \begin{vmatrix} h_u \vec{e}_u & h_v \vec{e}_v & h_z \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_z F_z \end{vmatrix}$$

Sustituyendo los valores correspondientes, el **gradiente**, la **divergencia** y el **rotacional** del campo de posición \vec{r} son:

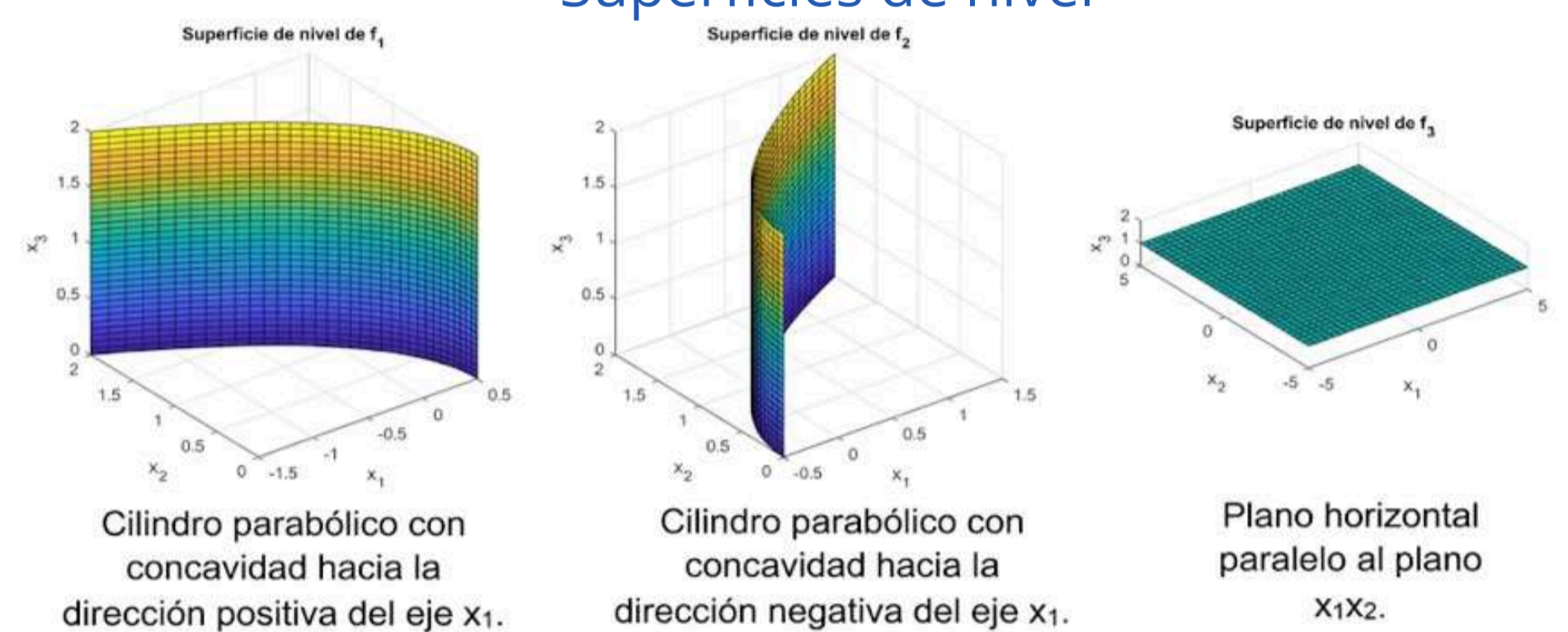
$$\nabla f(u, v, z) = \frac{1}{\sqrt{(u^2 + v^2)}} \left(\frac{\partial f}{\partial u} e_u + \frac{\partial f}{\partial v} e_v \right) + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{3u^2 - v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u^2 - 3v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2) \right] = 3$$

$$\nabla \times \vec{r} = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{vmatrix} \sqrt{u^2 + v^2} \vec{e}_u & \sqrt{u^2 + v^2} \vec{e}_v & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{u^2 + v^2} F_u & \sqrt{u^2 + v^2} F_v & F_z \end{vmatrix}$$

SUPERFICIES DE NIVEL Y ANÁLISIS DE LA CURVATURA

Superficies de nivel



Son **superficies regladas**. Estas superficies ofrecen ventajas como **estabilidad estructural**, **construcción eficaz** y **flexibilidad en el diseño**. Ejemplos:



Cálculo de la curvatura de la parábola

Con la parábola dada $y = -3x^2 + 1x$. **Parametrizamos** la fórmula y obtenemos sus derivadas.

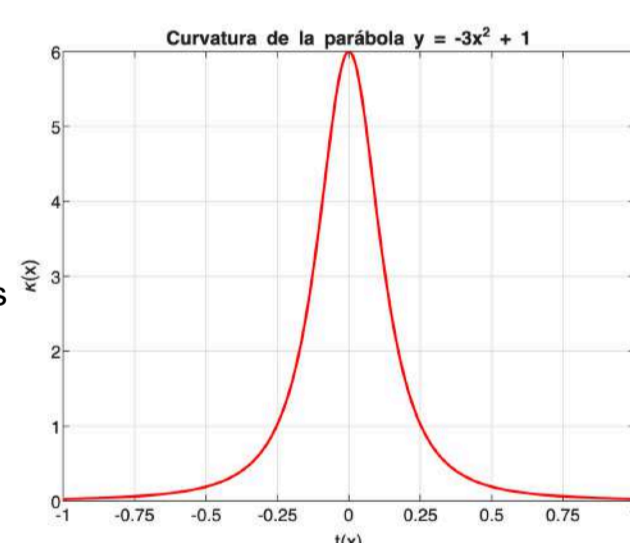
$$\begin{aligned} y &= f(t) = 3t^2 + 1 \\ f'(t) &= -6t \\ f''(t) &= -6 \end{aligned}$$

Su primera y segunda derivada darán el vector **velocidad** y **aceleración**, respectivamente. Siendo la fórmula de la curvatura la siguiente, obtenemos:

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|^3} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(t) & 0 \\ 0 & f''(t) & 0 \end{vmatrix}}{(\sqrt{1^2 + (f'(t))^2})^3} = \frac{|-6|}{(1 + (-6t)^2)^{3/2}} = \frac{6}{(1 + 36t^2)^{3/2}}$$

La curvatura presenta su punto de **máxima curvatura** en el eje de la parábola ($t=0$) y los puntos de **mínima curvatura** en los extremos de esta ($t=1$ y $t=-1$). Estos valores se obtienen:

$$\kappa(0) = \frac{6}{(1)^{3/2}} = 6 \quad \kappa(1) = \frac{6}{(1 + 36)^{3/2}} = \frac{6}{37^{3/2}} \quad \kappa(-1) = \frac{6}{(1 + 36)^{3/2}} = \frac{6}{37^{3/2}}$$



APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA PARÁBOLA EN INGENIERÍA

La parábola tiene diversas aplicaciones en la ingeniería. Destaca por su propiedad para distribuir fuerzas en la construcción de estructuras y por su capacidad de reflexión para dirigir ondas. Ejemplos:



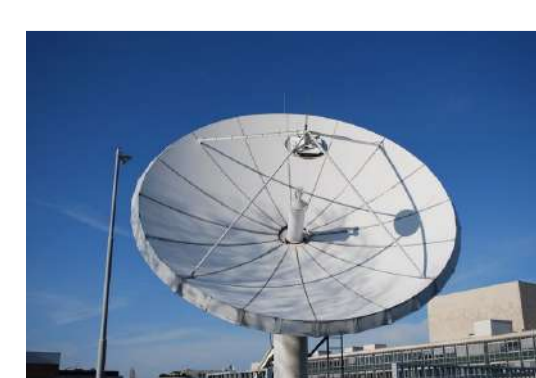
Puentes colgantes: Golden Gate (San Francisco, EEUU)



Faros



Presas: presa Hoover (Río Colorado, EEUU)



Antenas parabólicas



Puentes arco: Viaducto de Garabit (Francia)