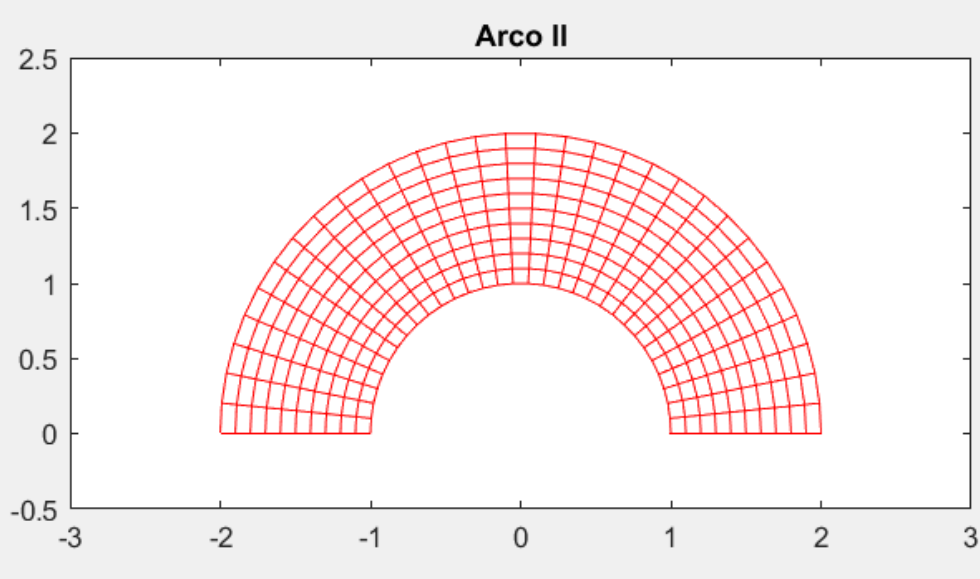


ONDAS Y CAMPOS VECTORIALES EN UN ARCO

El arco



El dominio arco está comprendido en el intervalo $1 \leq \sqrt{y^2 + x^2} \leq 2$ restringido al semiplano superior. En coordenadas cilíndricas, el radio queda comprendido entre 1 y 2, y el ángulo limitado al semiplano superior y la altura libre: $\rho \in [1, 2] \theta \in [0, \pi]$

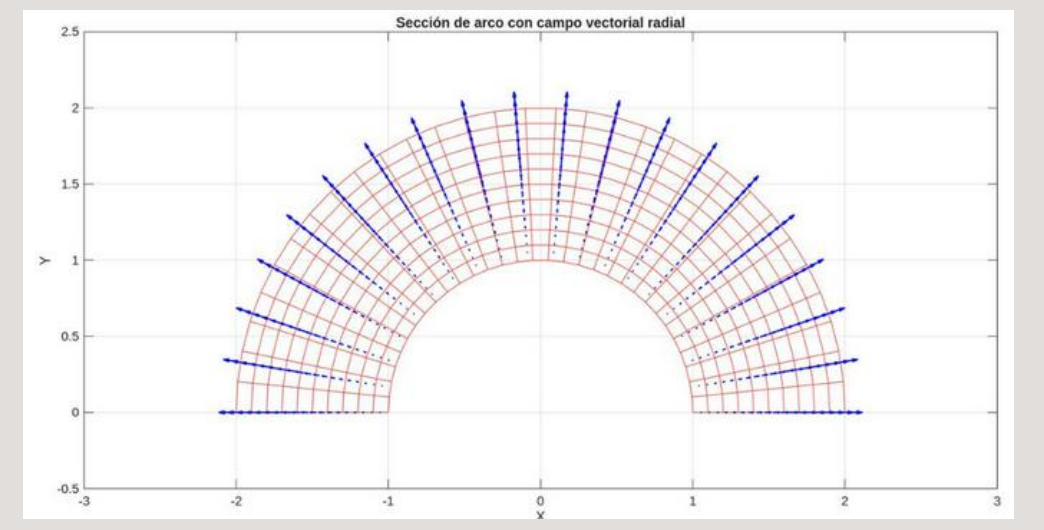
Sobre el arco se ha aplicado una fuerza que provoca una vibración. Los desplazamientos producidos por dicha fuerza vienen dados por una onda. Las ondas transversales vienen dadas por $\vec{u}(\rho, \theta) = \frac{1}{5}(\rho - 1)\rho\vec{e}_\rho$

Campo de vectores en el mallado

El campo no depende del ángulo θ , el campo es puramente radial.

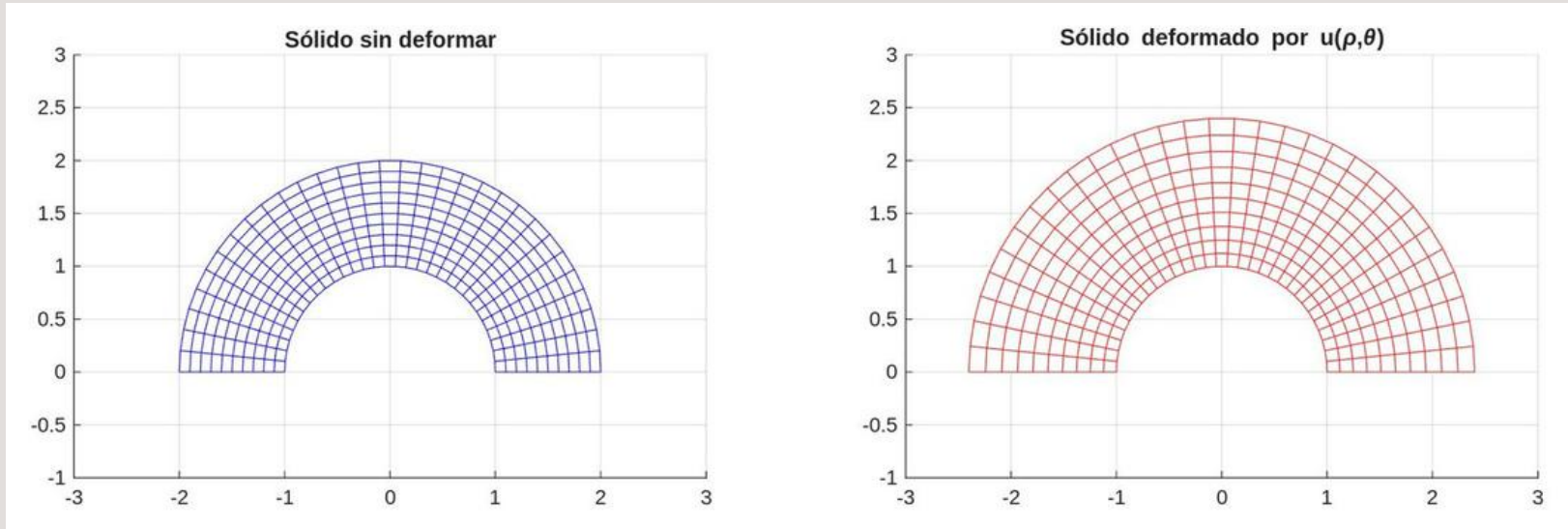
El sentido del campo es del centro hacia afuera.

Visualmente también se puede apreciar como la longitud de los vectores va creciendo a medida que se acercan al radio máximo.

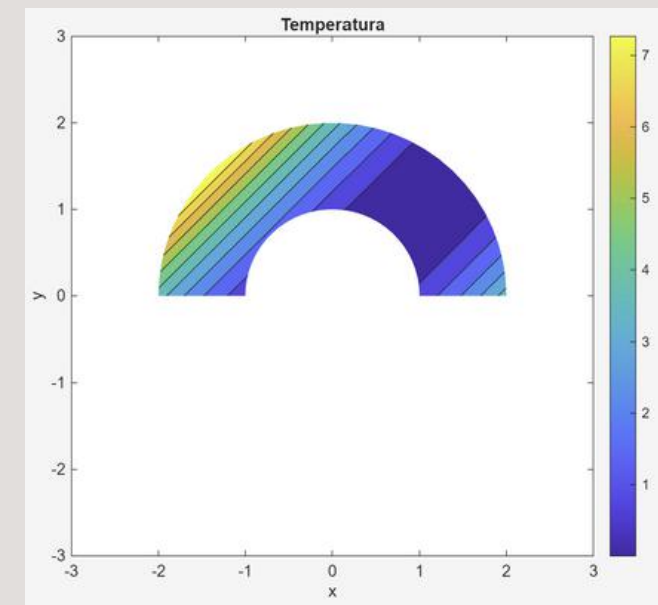


Deformación

El arco sufre una ligera deformación causada por el campo $\vec{u}(\rho, \theta) = \frac{1}{5}(\rho - 1)\rho\vec{e}_\rho$. En las imágenes se muestra el arco antes y después de sufrir dicha deformación.



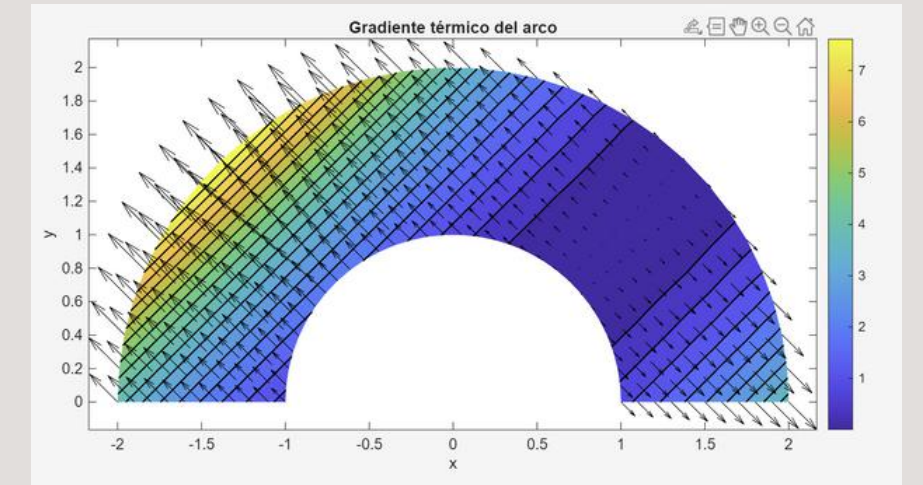
La temperatura



La temperatura del arco se distribuye a lo largo del arco siguiendo la siguiente función:

$$T(x, y) = (x - y)^2$$

Se han obtenido también el valor máximo de la temperatura (8) y el valor mínimo (0), como se muestra en la imagen con la barra de color.



El gradiente de temperatura calculado derivando $\nabla T(x, y) = (2(x - y), -2(x - y))$. Es ortogonal a las líneas de nivel representadas. Además, su dirección es hacia las zonas cálidas del arco.

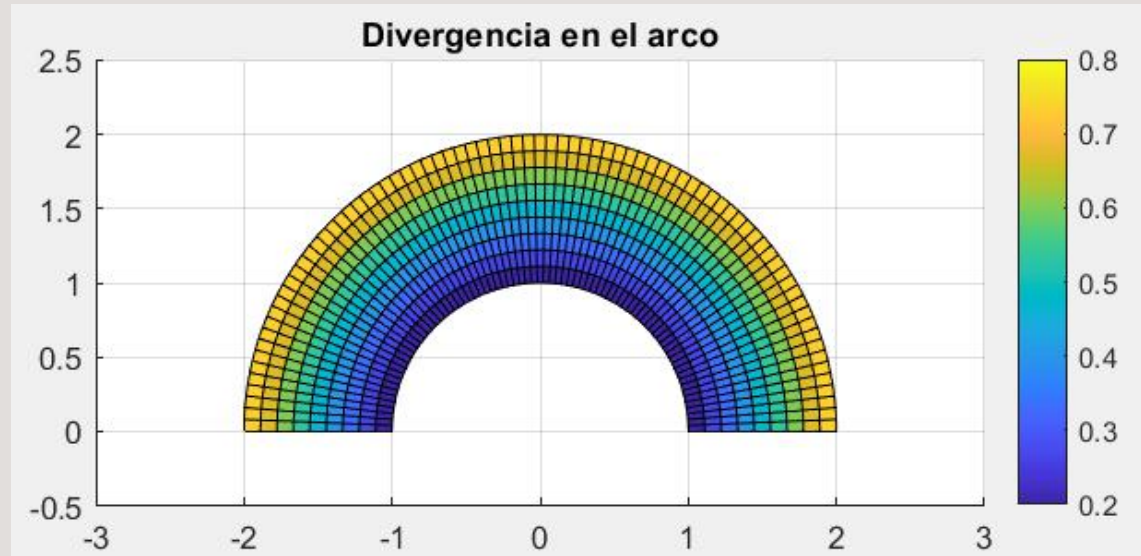
Divergencia

La divergencia de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas se define de esta forma:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right)$$

Tras determinar las componentes u_ρ ; u_θ ; u_z , se sustituyen en la ecuación, y se obtiene la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{5} (3\rho^2 - 2\rho) = \frac{1}{5} (3\rho - 2)$$



Como se observa en la imagen, la variación es radial, porque la divergencia depende linealmente de ρ . Por el contrario, como la divergencia no depende de θ , por lo que hay simetría angular.

Tensor deformaciones

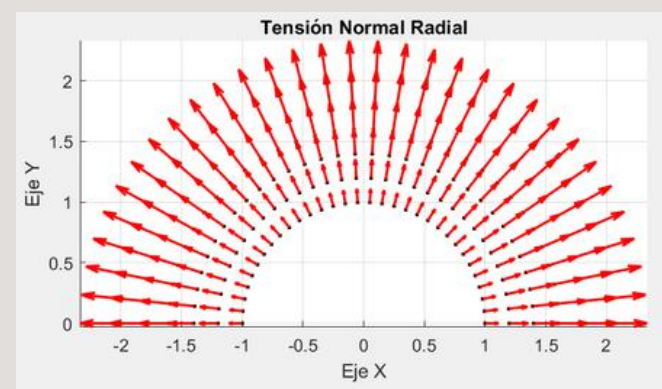
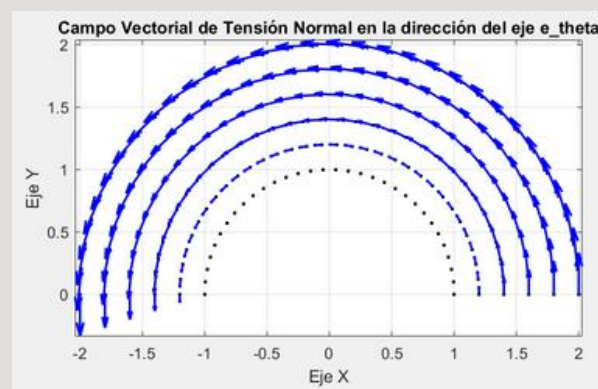
La parte simétrica del tensor gradiente es el tensor deformaciones, descrito por $\epsilon(\vec{u}) = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T}{2}$ pero en este caso, los desplazamientos permiten escribirlo como $\sigma = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I} + 2\mu \epsilon$

Se han calculado las tensiones normales que marcan los ejes \vec{e}_ρ y $\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta$. Para ello se ha calculado el gradiente y su traspuesto matricialmente

$$[\nabla \vec{u}(\rho, \theta)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(2\rho-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}(\rho-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2\rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\nabla \vec{u}(\rho, \theta)]^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2\rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\nabla \vec{u} = \nabla \vec{u}^T$, el tensor deformaciones queda definido como $\epsilon(\vec{u}) = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T}{2}$. De esta forma se calcula el tensor deformaciones matricialmente, y se calculan las tensiones normales:

- Tensión normal en la dirección del eje \vec{e}_ρ
 $\vec{e}_\rho \cdot \sigma \cdot \vec{e}_\rho = \frac{3}{5}(2\rho - 1)$
- Tensión normal en la dirección del eje $\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta$
 $\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta = \frac{3}{5}(\rho - 1)$



Tensiones tangenciales

Respecto al plano ortogonal a \vec{e}_ρ

Se han utilizado los datos del tensor deformaciones para calcular las tensiones.

$$|\sigma \cdot \vec{e}_\rho - (\vec{e}_\rho \cdot \sigma \cdot \vec{e}_\rho) \cdot \vec{e}_\rho| = \left| \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2\rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{3}{5}(2\rho-1) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Como las tensiones son nulas, no se pueden representar.

Respecto al plano ortogonal a $\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta$

$$|\sigma \cdot \frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta - (\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta \cdot \sigma \cdot \frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta) \frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta| = \left| \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2\rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{3}{5}(\rho-1) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Como las tensiones son nulas, no se pueden representar.

Campo vectorial \vec{u}

$$\vec{u}(\rho, \theta) = \frac{1}{5}(\rho - 1)\rho\vec{e}_\rho$$

Rotacional de \vec{u}

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ 2\rho-1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\rho^2 - \rho^5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{e}_\rho + 0\vec{e}_\theta + 0\vec{e}_z$$

Esto supone que el campo se comporta como un campo radial, es decir, no tiene tendencia a girar, sus líneas apuntan hacia o directamente desde un punto, pero no giran alrededor del centro.

Masa aproximando la integral numéricamente

$$M = \int_0^\pi \int_1^2 (1 + e^{\rho^2 \cos \theta}) \rho d\rho d\theta = 24,6528$$

La Densidad de la placa viene dada por la ecuación: $d(\rho, \theta) = 1 + e^{\rho^2 \cos \theta}$

La integral se ha resuelto de manera numérica en Matlab.