Representación de funciones aleatorias utilizando coeficientes de Fourier

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

POLITÉCNICA

Leire Aparicio Julia Calado Sofía García Álvaro Silva

Ecuaciones en derivadas parciales

EPES
Escuela Politécnica de Enseñanza Superior

Introducción

La manera más común de representar la serie de Fourier de una función f es calculando los coeficientes de Fourier, que son constantes y se obtienen a partir de las integrales vistas en clase. Sin embargo, en algunos contextos reales como la modelización de fenómenos naturales, no es razonable pensar que esos coeficientes son funciones constantes. Por ello, el objetivo de este trabajo será reemplazar estos coeficientes por variables aleatorias que sigan una determinada distribución (en concreto nos centraremos en la normal y la uniforme). Esta es una manera de representar la aleatoriedad o caos intrínseco que existe en muchos fenómenos estocásticos o naturales que encontramos en el día a día.

Planteamiento del modelo matemático

En este trabajo trataremos de estudiar y representar las series de Fourier en el intervalo $[-1,1]$ considerando los coeficientes como variables aleatorias en lugar de coeficientes fijos. Comenzamos definiendo la ecuación general que utilizaremos:

$$f_\sigma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

donde los coeficientes a_n y b_n se generarán a partir de distribuciones probabilísticas en lugar de calcularlos mediante integrales. Estudiaremos dos escenarios diferentes:

- **Distribución uniforme:** los coeficientes seguirán una distribución uniforme en el intervalo $[-1,1]$, es decir, $a_n, b_n \sim \mathcal{U}(-c,c)$
- **Distribución normal:** los coeficientes seguirán una distribución normal estándar, $a_n, b_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Además, asumiremos que los coeficientes a_n y b_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Cálculo de la esperanza, varianza, y covarianza

Esperanza

Tanto en el caso en que los coeficientes a_n y b_n siguen una distribución $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ como en el caso $a_n, b_n \sim \mathcal{U}(-c,c)$ se cumple que $E[a_n] = E[b_n] = 0$, y entonces la esperanza se calcula:

$$E[f_\sigma(x)] = \sum_{n=1}^{N} [E[a_n]\cos(nx) + E[b_n]\sin(nx)] = 0$$

Varianza

A continuación calculamos la varianza mediante la fórmula $V(f_\sigma(x)) = E[f_\sigma(x)^2] - E[f_\sigma(x)]^2$, y teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior, basta calcular

$$f_\sigma(x)^2 = \sum_{n,m} [a_n a_m \cos(nx)\cos(mx) + b_n b_m \sin(nx)\sin(mx) + 2a_n b_m \cos(nx)\sin(mx)]$$

Entonces, aplicando la esperanza y usando la independencia entre a_n y b_n y que su media es cero, se llega a

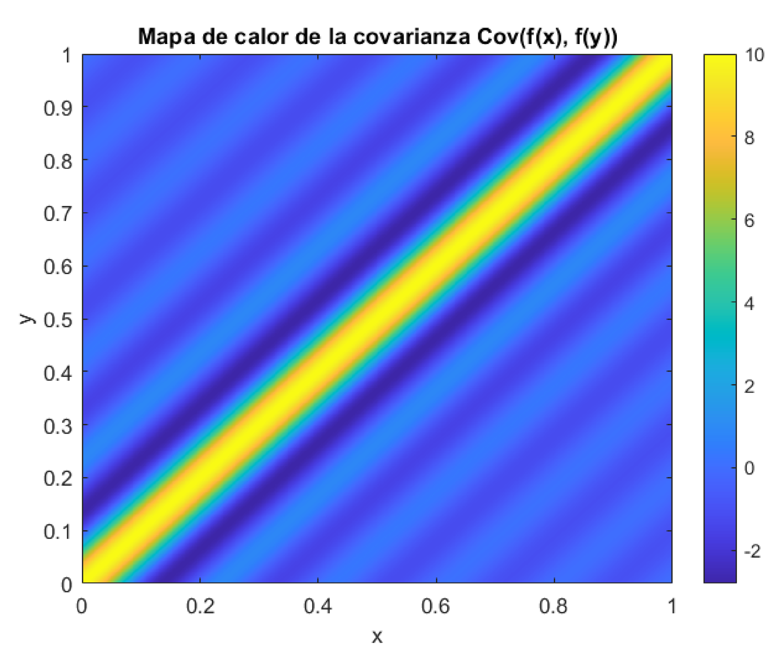
$$V(f_\sigma(x)) = \sum_{n=1}^{N} [\sigma_{a_n}^2 \cos^2(nx) + \sigma_{b_n}^2 \sin^2(nx)] = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2$$

Covarianza

Por último, la covarianza se calcula $Cov(f(x), f(y)) = E[f(x)f(y)] - E[f(x)]E[f(y)]$

$$E[f(x)f(y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 [\cos(n\pi x)\cos(n\pi y) + \sin(n\pi x)\sin(n\pi y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \cos(n\pi(x-y))$$

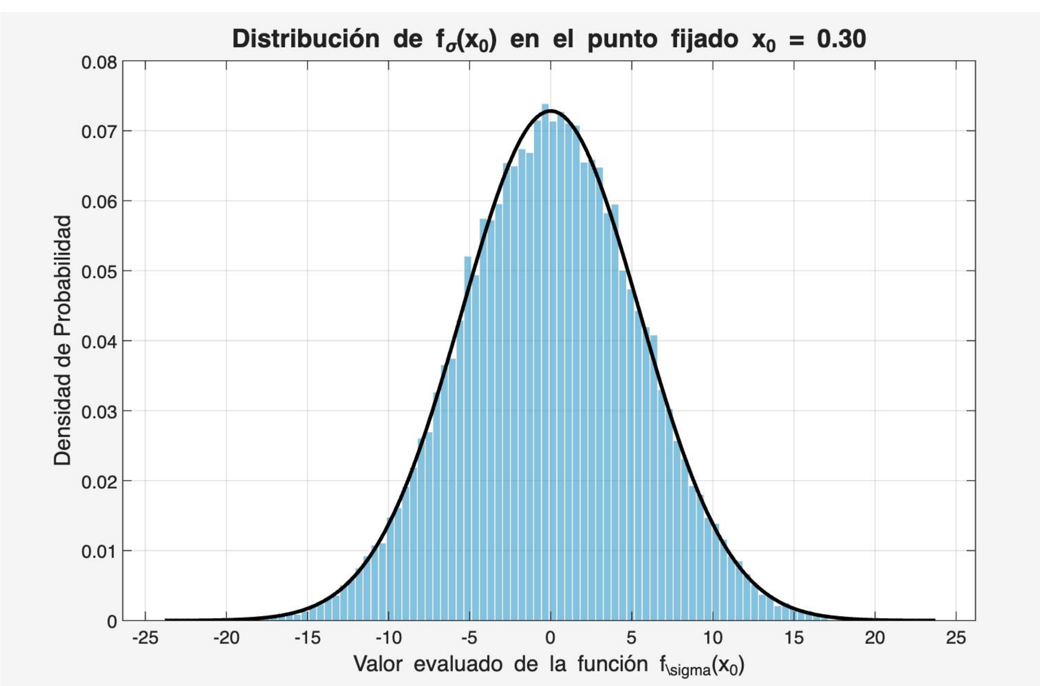
Es importante observar que la covarianza no depende de los puntos x e y, sino de la distancia entre ambos $(x-y)$. Para visualizar esto hemos desarrollado un código en *Matlab* que represente mediante distintos colores la covarianza. Vemos que la covarianza es máxima en la diagonal y va oscilando a medida que la distancia entre x e y aumenta.



Cuestiones probabilísticas

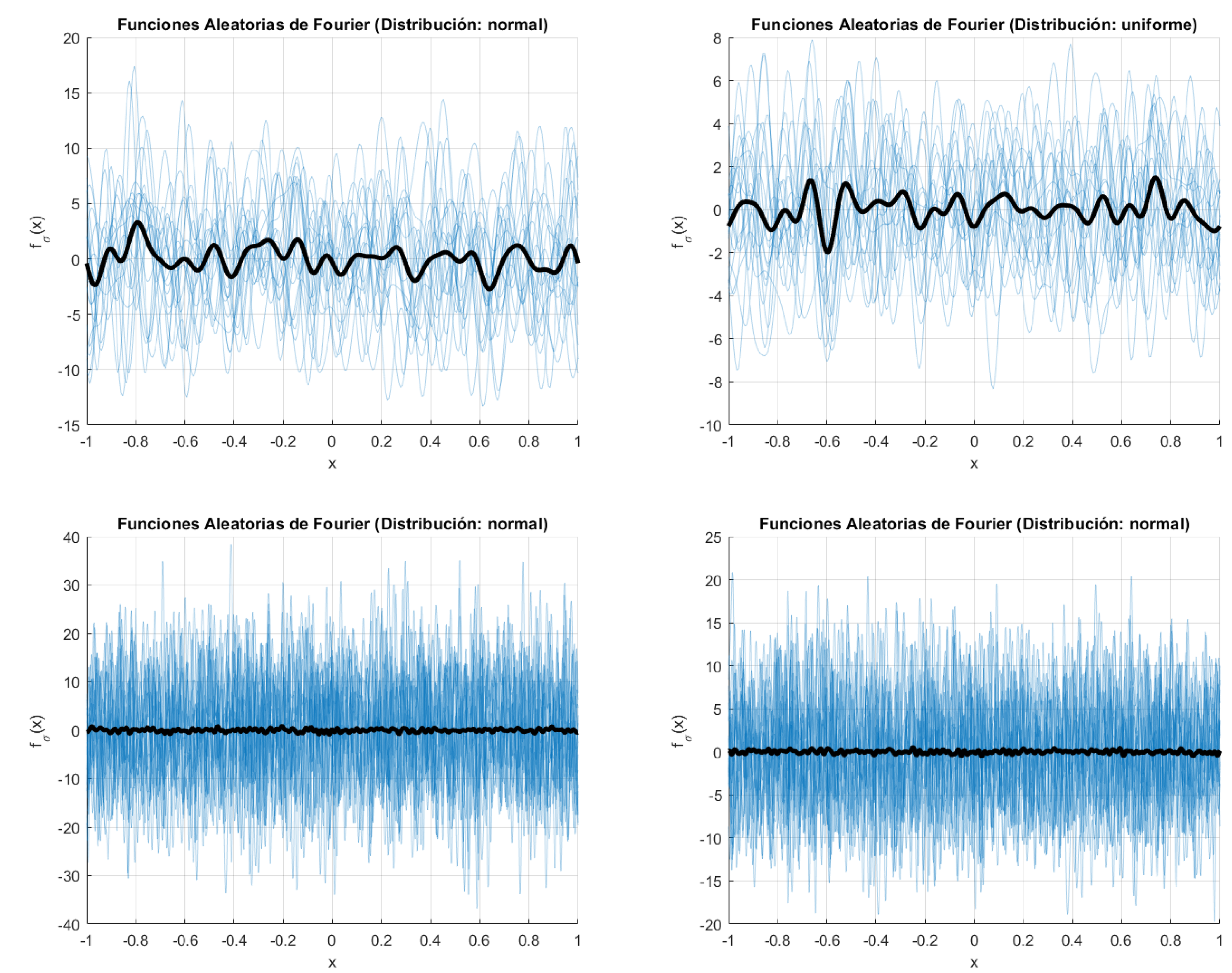
Probabilidad de signo en un punto fijo

Si fijamos un punto $x \in [-L, L]$, dado que la función f_σ es una combinación lineal de variables aleatorias independientes a_n, b_n que siguen o bien una distribución $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ o $\mathcal{U}(-c,c)$, la probabilidad de que la función sea positiva o negativa será de 0.5 en ambos casos. Esto se debe a que la suma de variables aleatorias que siguen una distribución normal siempre da como resultado una normal, por lo que $f_\sigma \sim N(0,\sigma^2)$. Por otro lado, si a_n, b_n son uniformes, por el teorema central del límite sabemos que la suma de todas estas variables aleatorias convergerá a una normal, luego la probabilidad vuelve a ser 0.5. Es importante destacar que esto ocurre porque los coeficientes que hemos considerado están centrados en cero. Si la media no fuese nula, la probabilidad dejaría de ser simétrica.



Comportamiento en un intervalo

Aunque en cada punto fijo la probabilidad es 0.5, el comportamiento en un intervalo es diferente. Dada la simetría de la función $f_\sigma(x)$ que hemos explicado en el caso del comportamiento en un punto, podemos pensar que la probabilidad para el caso del intervalo es también 0.5. En lugar de demostrarlo teóricamente, hemos desarrollado una simulación en *Matlab* que genera funciones $f_{\sigma_i}(x)$ y calcula la media empírica de todas estas funciones (que aparece dibujada en color negro en las siguientes gráficas) para una distribución normal y uniforme, respectivamente. Observamos la línea negra, que representa la media empírica de un conjunto pequeño de realizaciones ($M \approx 30$), y vemos que fluctúa alrededor del cero. Al aumentar $M \to \infty$, esta línea convergería a la esperanza teórica $E[f(x)] = 0$.



Aplicaciones

Las series de Fourier con coeficientes aleatorios nos permiten modelizar fenómenos que no son predecibles:

- **Procesamiento de señales:** Los coeficientes de Fourier representan las frecuencias en una señal. Si los consideramos aleatorios, entonces vamos a poder modelar ruido, señales aleatorias o procesos estacionarios.
- **Oceanografía y meteorología:** Las olas del mar, por ejemplo, pueden modelarse como una suma de funciones con amplitudes y fases aleatorias que dependen del viento.
- **Movimiento browniano:** Utilizando coeficientes aleatorios podemos generar movimiento browniano en el intervalo $[0, 2\pi]$, que sirve para predecir comportamientos aleatorios en sistemas complejos donde intervienen fluctuaciones caóticas, siendo fundamental en física para la difusión de partículas, en biología para el movimiento celular y, crucialmente, en finanzas para modelar la volatilidad de precios de activos.