ECUACIÓN DEL CALOR

NATALIA GUTIÉRREZ DE URIARTE, ALBA PERALTA ZAMORA, AINHOA MARTÍN GARCÍA

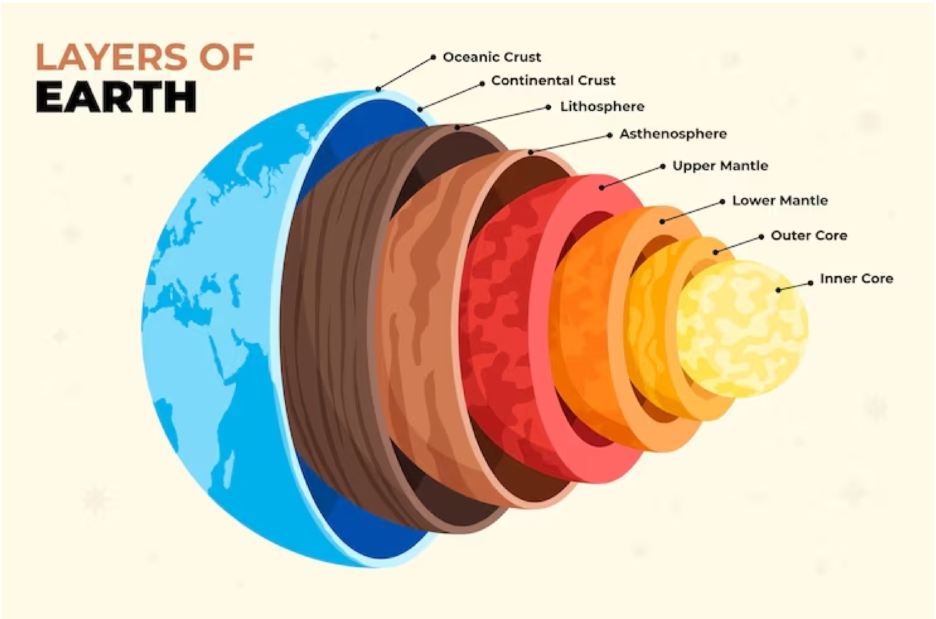
(GRADO EN MATEMÁTICAS)

Objetivo

El objetivo de este trabajo es estudiar el enfriamiento de los planetas a través de la ecuación del calor. Para ello, se va a modelizar la ecuación del calor en la Tierra y se procederá a hacer una comparación con dicha ecuación el tiempo que tarda cada planeta en enfriarse.

Introducción

En el centro de la Tierra hay un núcleo que tiene una temperatura que puede llegar a alcanzar los 5500°C. Ese calor del núcleo se transporta por conducción hacia la superficie atravesando una capa sólida de la tierra conocida como litosfera.



Modelización

El flujo del calor en un punto es proporcional al gradiente de temperatura en ese punto. Eso se conoce como la ley de Fourier:

$$\vec{F} = -k\nabla T. \tag{1}$$

En la ecuación (1), k equivale a la constante de conductividad térmica y T es la temperatura.

Para sacar la ecuación del calor, se va a utilizar también la ecuación de difusión térmica que indica cómo cambia la temperatura con el tiempo.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \vec{F} + A. \tag{2}$$

En la ecuación (2), A es la cantidad de calor que se genera por unidad de volumen, conocido como la densidad de las fuentes del calor. C_p es el calor específico y ρ es la densidad de la litosfera.

Sustituyendo el flujo de la ley de Fourier en la ecuación de difusión térmica se obtiene:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k\nabla T) + A = k\nabla^2 T + A. \tag{3}$$

Ignorando la producción de calor, es decir, considerando que no hay producción de calor ($A = 0$), la ecuación quedaría:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T, \tag{4}$$

siendo $\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$, conocido como la difusividad térmica. Esto mide lo rápido que se propaga el calor en un material. En este caso, el material es la litosfera.

Como las unidades de la difusividad térmica son m^2/s y el tiempo se mide en segundos, se tiene que la longitud de difusión es $L = \sqrt{\kappa t}$. Esto implica que el cambio de temperatura tarda en propagarse l^2/κ segundos, siendo l una distancia.

Solución de la EDP

Se toma como condición de contorno:

$$T_0 = T_m + A_0 \cdot sin(\omega t), \tag{5}$$

siendo T_m la temperatura ambiente media, A_0 la cantidad máxima de calor que se genera por unidad de volumen, ω la frecuencia angular de la variación periódica y t el tiempo.

La frecuencia angular es diferente en la oscilación diaria que en la oscilación estacional. Es decir, la variación de temperatura a lo largo de un día es diferente a la variación de temperatura a lo largo del año. En resumen, la temperatura cambia de forma periódica en el tiempo. Es por esto que, según el tipo de estudio que se realice, se tendrá que considerar una u otra.

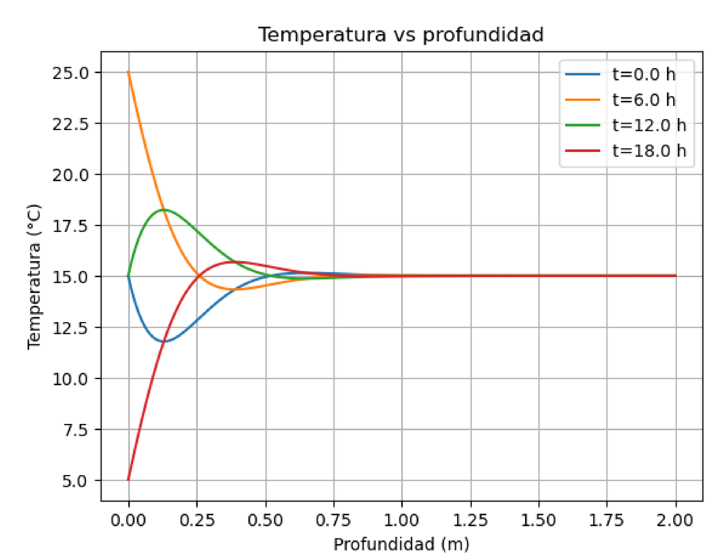
Se va a tener en cuenta que en la profundidad x, la amplitud máxima de la onda sinusoidal de la temperatura es $A_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}}$, siendo $\alpha = \kappa = \frac{k}{\rho C_p}$. Expresándolo en función del periodo P y relacionándolo con $\omega = \frac{2\pi}{P}$, obtenemos la siguiente ecuación:

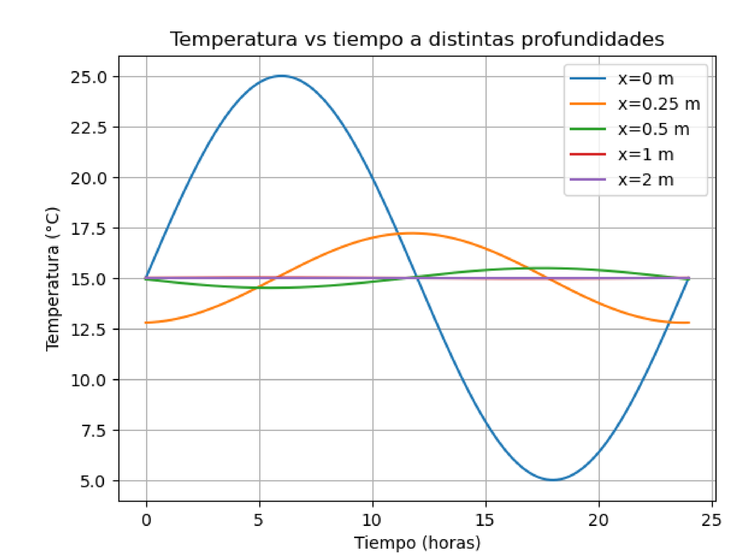
$$T(x,t) - T_m = A_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{P\alpha}}} sin(\frac{2\pi}{P}t - x\sqrt{\frac{\pi}{P\alpha}}). \tag{6}$$

Cuando la temperatura en la superficie oscila, esa variación se transmite hacia el interior del suelo, pero no ocurre igual en todas las profundidades.

- La amplitud disminuye con la profundidad: en la superficie, hay grandes cambios de temperatura; a medida que se baja, los cambios son cada vez menores; y a suficiente profundidad, la temperatura casi no cambia. Por consiguiente, el suelo 'amortigua' las oscilaciones.
- Aparece un desfase: la temperatura en profundidad no cambia al mismo tiempo que en la superficie (a mayor profundidad, más 'retraso' hay)

Representación de la solución





En la primera gráfica, se representa la temperatura frente a la profundidad para distintos instantes de tiempo. Se puede observar como a medida que aumenta la profundidad, todas las curvas tienden a converger hacia la temperatura media. Estos comportamientos son coherentes con la solución teórica de la ecuación del calor, en la que la amplitud de la temperatura disminuye exponencialmente con la profundidad. Por tanto, el modelo predice correctamente que, a suficiente profundidad, la temperatura permanece prácticamente constante e independiente del tiempo.
En la gráfica de la derecha, se representa la temperatura en función del tiempo para distintas profundidades. En ella, se observa cómo la temperatura oscila. Sin embargo, a medida que aumenta la profundidad, la amplitud de estas oscilaciones disminuye progresivamente, aproximándose a una línea horizontal que toma el valor de la temperatura media.
Este resultado concuerda con la solución analítica de la EDP, que predice tanto la disminución exponencial de la amplitud como la presencia de un desfase temporal en las oscilaciones térmicas conforme aumenta la profundidad.

Comparación entre planetas

Se puede definir un tiempo característico de difusión térmica o enfriamiento, que representa el orden de magnitud del tiempo necesario para que una perturbación térmica se propague una distancia característica dentro del material.

En el caso de la ecuación del calor, dicho tiempo característico viene dado por:

$$\tau \sim \frac{L^2}{\kappa}, \tag{7}$$

donde L es una longitud característica del sistema y κ es la difusividad térmica del material.

Este parámetro permite estimar el tiempo necesario para que un planeta experimente cambios significativos en su temperatura interna. En particular, cuanto mayor sea el tamaño característico del planeta, mayor será el tiempo necesario para que el calor se difunda desde el interior hacia la superficie.

En particular, se toma como longitud característica el radio del planeta y la difusividad térmica de las rocas ($10^{-6} m^2/s$). Se muestra a continuación una comparación de este tiempo de enfriamiento en distintos planetas:

Planetas	Radio (m)	τ (años)
Tierra	6.37×10^6	1.3×10^{12}
Venus	6.05×10^6	1.2×10^{12}
Marte	3.39×10^6	3.6×10^{11}

Table 1. Estimación del tiempo característico de enfriamiento para distintos planetas

Dado que el tiempo característico depende cuadráticamente del radio, pequeñas diferencias en el tamaño planetario producen grandes diferencias en los tiempos de enfriamiento.

Los tiempos característicos obtenidos son considerablemente mayores que la edad del Sistema Solar. Esto se debe a que el modelo utilizado considera únicamente difusión térmica por conducción. En la realidad, procesos adicionales como la convección en el manto contribuyen significativamente al transporte de calor, reduciendo el tiempo efectivo de enfriamiento de los planetas.

Conclusiones

El modelo permite entender cómo se transmite la temperatura en el interior de un planeta, mostrando que las variaciones térmicas superficiales apenas afectan a grandes profundidades. De igual modo, se deduce que el tamaño del planeta es un factor clave en su enfriamiento, ya que los cuerpos más grandes conservan el calor durante más tiempo.

Sin embargo, los resultados evidencian que la conducción por sí sola no describe completamente la realidad, lo que deja ver la importancia de otros mecanismos físicos como la convección en la evolución térmica planetaria.

Referencias

[1] Wikipedia, *Litosfera*. Disponible en: `https://es.wikipedia.org/wiki/Litosfera`.

[2] *Geofísica de la tierra sólida.Capítulo 5-1*. Disponible en: `https://www.mttmllr.com/geoTS_files/geo_ts_cap5-1.pdf`.

[3] García Arias, S., Rey Ronco, M.A., Alonso Sánchez, T. *Trabajo Fin de Máster*. Universidad de Oviedo. Disponible en: `https://digibuo.uniovi.es/dspace/bitstream/handle/10651/27941/TFMSandraGarciaAriasProteg.pdf`.