ONDA TRANSVERSAL PLANA

Presentación del problema:

El proyecto trata sobre el estudio de una onda transversal plana, es decir, cómo se propaga un tipo de onda en un medio de forma uniforme.

El arco está comprendido entre los radios $1\ \sqrt{x^2+y^2}<2$

Definidas 2 cantidades físicas:

- La Temperatura $T(x,y)=(x-y)^2$
- Los Desplazamientos $\vec{r}(x,y)=r_0(x,y)+\vec{u}(x,y,t)$

También conocemos → $\vec{u}(\rho,\theta)=\frac{1}{5}(\rho-1)\rho\,\vec{e}_\rho$

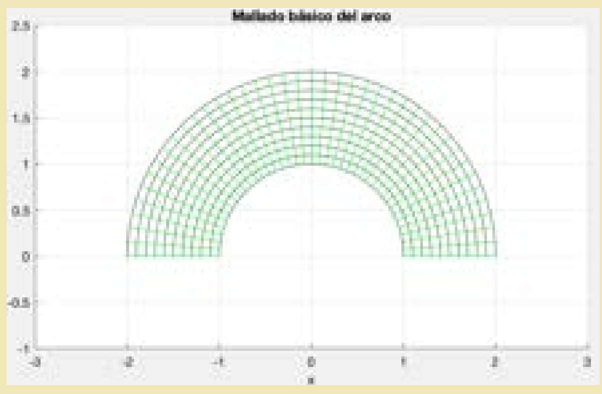
Motivación del proyecto

- Aplicar los conceptos fundamentales vistos en clase
- Uso de MATLAB (cálculos y gráficas)
- Mostrar la utilidad práctica de los conceptos estudiados en la vida real

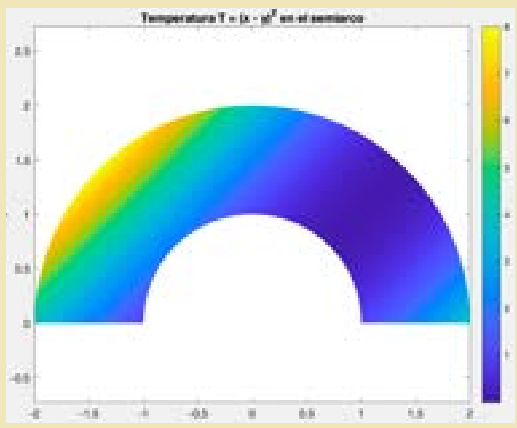
1. MALLADO

$(x,y)\in[0,4]\times[-1/2,1/2]$

Paso de muestreo (intervalo entre pto. y pto.) → h = 1/10



2. TEMPERATURA



$$T(\rho,\theta)=-\log\left((\rho-1)^2+0.1\right)$$

3. ∇T

La fórmula en cilíndricas del gradiente es:

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

Como T solo depende de ρ, la derivada parcial de θ es nula

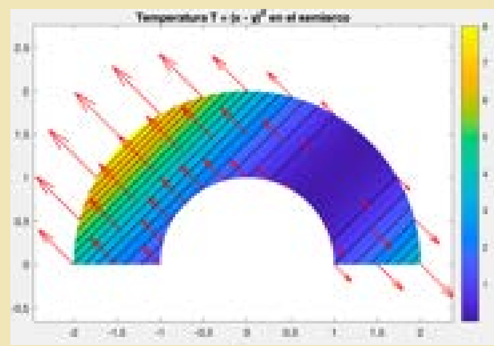
$$\nabla T(\rho,\theta)=-\frac{2(\rho-1)}{(\rho-1)^2+0.1}\vec{e}_\rho$$

Lo pasamos a cartesianas:

eρ = (cosθ, senθ)

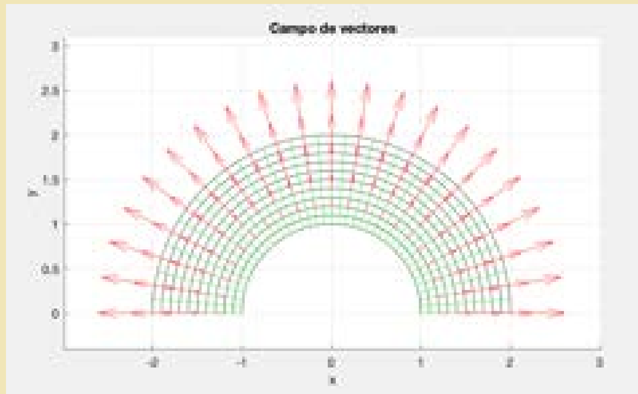
$$\nabla T_x=-\frac{2(\rho-1)}{(\rho-1)^2+0.1}\cos\theta$$

$$\nabla T_y=-\frac{2(\rho-1)}{(\rho-1)^2+0.1}\sin\theta$$



4. CAMPO DE VECTORES

$$\vec{u}(\rho,\theta)=\frac{1}{5}(\rho-1)\rho\vec{e_\rho}$$



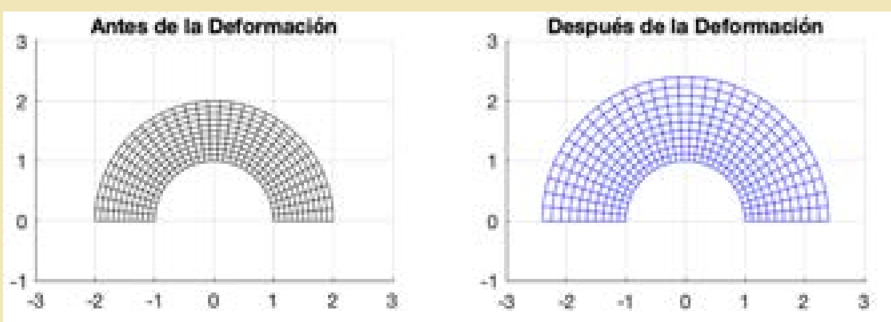
5. DESPLAZAMIENTO ANTES Y DESPUÉS

Posición inicial de cada pto. del sólido ⇒ $\vec{r}_0=(x,y)=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$

Nueva posición tras deformarse ⇒ $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{u}$

El desplazamiento es ⇒ $\vec{r}=(\rho+u_\rho)\vec{e}_\rho$

Por lo tanto: $\rho_{\text{nuevo}}=\rho+\frac{1}{5}(\rho-1)\rho$



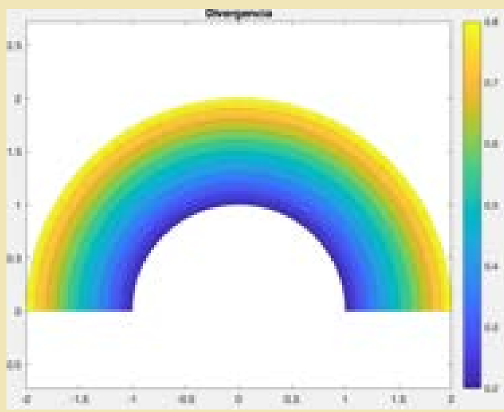
6. DIVERGENCIA

La fórmula de la divergencia en cilíndricas es la siguiente:

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Como uφ y uz son igual a 0

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,u_r(r))$$



Tras los cálculos:

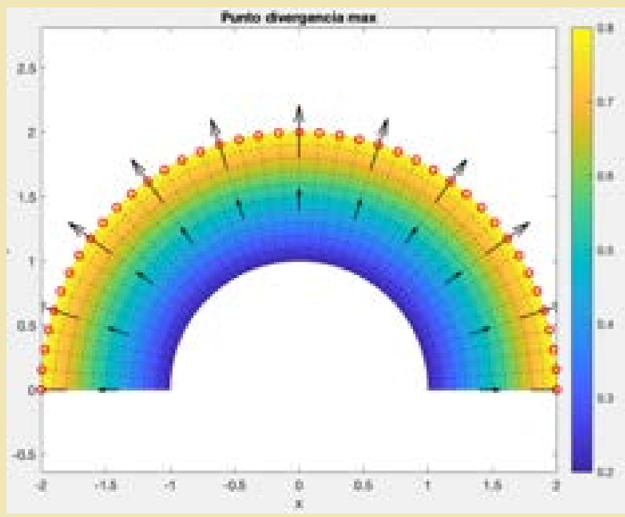
$$\nabla\cdot\vec{u}(r)=\frac{1}{5}(3r-2)$$

r=1 → $\nabla\cdot\vec{u}(1)=\frac{1}{5}(3-2)=\frac{1}{5}=0.2$

r=2 → $\nabla\cdot\vec{u}(2)=\frac{1}{5}(6-2)=\frac{4}{5}=0.8$

Válida para todo r∈[1,2] e independiente de φ y z

Los puntos con mayor divergencia son los del borde exterior r=2 (la divergencia crece con r)



Los puntos con mayor divergencia → limite superior del arco de radio dos.

Están representados con círculos rojos a lo largo de toda la figura.

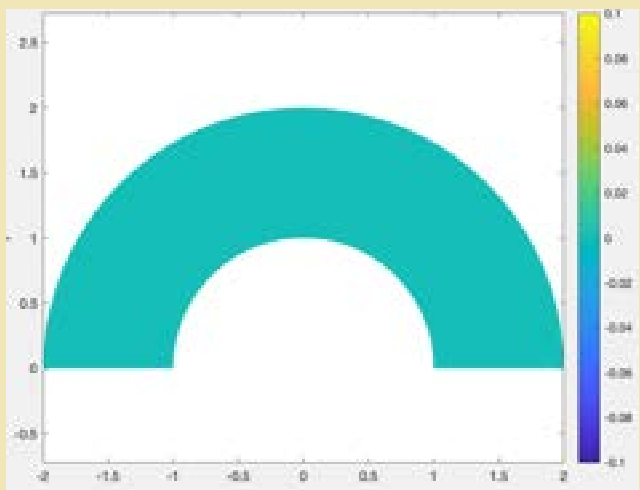
7. ROTACIONAL

El rotacional en coord. cilíndricas:

$$\nabla\times\vec{u}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_r+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_z$$

En nuestro caso, como
uφ≡0
uz≡0
ur depende solo de r ⇒ $\nabla\times\vec{u}(r,\varphi)=\vec{0}$

- El módulo es $|\nabla\times\vec{u}|=0$
- No hay puntos con mayor rotación



8. TENSIONES NORMALES

Realizamos los siguientes cálculos

$$\operatorname{div}\vec{u}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\ \text{-->}\ \operatorname{div}\vec{u}=\frac{1}{5}(3\rho-2)$$

Componentes del tensor deformación

- $\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}$
- $\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_\rho}{\rho}$ (porque $u_\theta=0$)
- $\varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\theta\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho}-\frac{u_\theta}{\rho}\right)=0$

-->

-->

$$\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{5}(\rho^2-\rho)\right]=\frac{1}{5}(2\rho-1),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_\rho}{\rho}=\frac{1}{5}(\rho-1).$$

Componentes del tensor tensiones

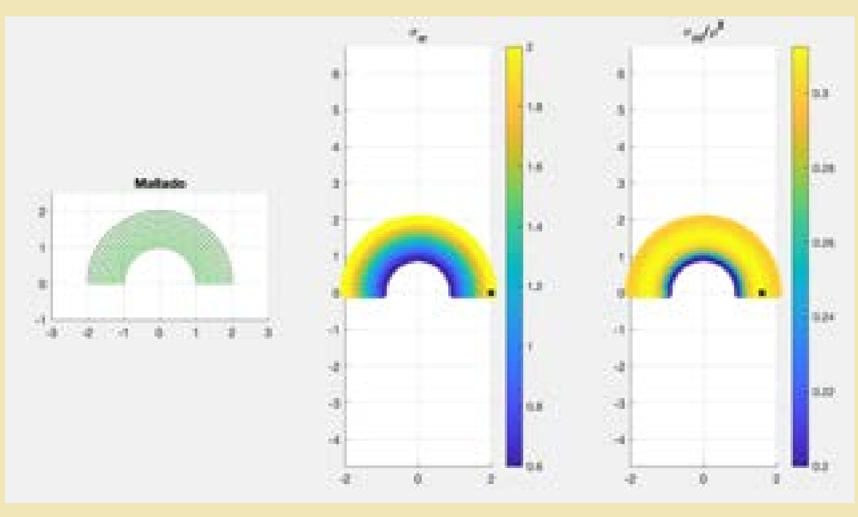
$$\sigma_{\rho\rho}=(\operatorname{div}\vec{u})+2\varepsilon_{\rho\rho},\qquad\sigma_{\theta\theta}=(\operatorname{div}\vec{u})+2\varepsilon_{\theta\theta}.$$

Sustituimos los valores

$$\sigma_{\rho\rho}=\tfrac{1}{5}(3\rho-2)+2\cdot\tfrac{1}{5}(2\rho-1)=\tfrac{1}{5}(3\rho-2+4\rho-2)=\tfrac{1}{5}(7\rho-4).$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\tfrac{1}{5}(3\rho-2)+2\cdot\tfrac{1}{5}(\rho-1)=\tfrac{1}{5}(3\rho-2+2\rho-2)=\tfrac{1}{5}(5\rho-4).$$

- Tensión normal en dirección eρ $\vec{e}_\rho\cdot\sigma\cdot\vec{e}_\rho=\sigma_{\rho\rho}=\frac{1}{5}(7\rho-4)$
- Tensión normal en dirección 1/ρ eθ $\left(\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta\right)\cdot\sigma\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta\right)=\frac{1}{\rho^2}\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{1}{5}(5\rho-4)=\frac{5\rho-4}{5\rho^2}$



9. TENSIONES TANGENCIALES (Eρ)

El componente tangencial del vector es:

$$\vec{t}_{\tan}=\sigma\cdot\vec{e}_\rho-(\vec{e}_\rho\cdot\sigma\cdot\vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho$$

Cálculo en coord. cilíndricas

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{\rho\rho}&\sigma_{\rho\theta}\\\sigma_{\theta\rho}&\sigma_{\theta\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7\rho-4}{5}&0\\0&\frac{5\rho-4}{5}\end{pmatrix}$$

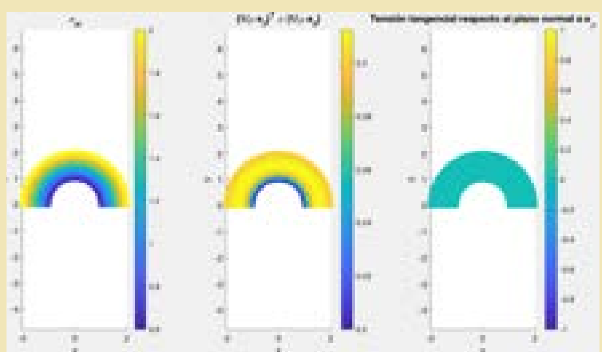
Otros cálculos

$$\sigma\cdot\vec{e}_\rho=\sigma_{\rho\rho}\vec{e}_\rho+\sigma_{\theta\rho}\vec{e}_\theta=\sigma_{\rho\rho}\vec{e}_\rho+0\cdot\vec{e}_\theta$$

$$(\vec{e}_\rho\cdot\sigma\cdot\vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho=\sigma_{\rho\rho}\vec{e}_\rho.$$

Por lo tanto, el vector tangencial:

$$\vec{t}_{\tan}=\sigma\cdot\vec{e}_\rho-\sigma_{\rho\rho}\vec{e}_\rho=\vec{0}$$



Por lo tanto, no hay correlación con los puntos de mayor deformación de la malla. Las mayores deformaciones radiales existen en ρ=2 (o crecen con ρ)

10. TENSIONES TANGENCIALES (1/ρ Eθ)

Partimos de los siguientes datos: $\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{\rho\rho}&0\\0&\sigma_{\theta\theta}\end{pmatrix}$ $\sigma_{\rho\rho}=\frac{7\rho-4}{5}$ $\sigma_{\theta\theta}=\frac{5\rho-4}{5}$

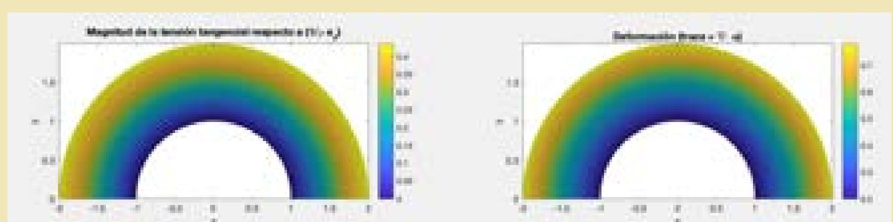
EL vector unitario escalado dado por el enunciado es: $\vec{m}=\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta$

Cálculos varios $(\vec{m}\cdot\sigma\cdot\vec{m})\,\vec{m}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\vec{e}_\theta=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho^3}\vec{e}_\theta$

La magnitud pedida: $\|\sigma\cdot\vec{m}-(\vec{m}\cdot\sigma\cdot\vec{m})\,\vec{m}\|=|\sigma_{\theta\theta}|\,\frac{\rho^2-1}{\rho^3}$

Sustituyendo σθθ, obtenemos la expresión final (solo depende de ρ) $T(\rho)=\frac{5\rho-4}{5}\cdot\frac{\rho^2-1}{\rho^3}=\frac{(5\rho-4)(\rho^2-1)}{5\rho^3}$

- Para ρ∈[1,2], la función T(ρ) se anula en ρ=1 y es positiva para ρ>1
- Evaluamos para ρ=2 (alcanza su máximo) $T(2)=\frac{(5\cdot2-4)(2^2-1)}{5\cdot2^3}=\frac{(10-4)\cdot3}{40}=\frac{18}{40}=0.45.$



11. DENSIDAD

La densidad de la placa viene dada por:

$$d(\rho,\theta)=1+e^{\rho^2}\cos\theta.$$

La masa M se calcula:

$$M=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=1}^{2}\left(1+e^{\rho^2}\cos\theta\right)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{3\pi}{2}$$

12. APLICACIÓN

Para dar una aplicación concreta, interpretaremos el dominio del problema —un arco circular definido entre los radios 1 y 2— como una sección de la corteza terrestre, y consideraremos que el campo de desplazamientos u representa el movimiento inducido por ondas sísmicas, en particular las ondas S, que son ondas transversales que se propagan durante un terremoto.

- Función temperatura → Gradiente térmico asociado a zonas profundas de la corteza
- Campo de desplazamientos → Desplazamiento radial provocado por el paso de ondas sísmicas S
- La divergencia → Cambios locales de volumen en el material
- El rotacional → Tendencia del material a rotar, torcerse o cizallarse. Si es elevado --> deformación intensa
- Cálculo de tensiones → Tensiones internas del material

13. BIBLIOGRAFÍA

https://simula.industriales.upm.es/apuntes/mcd.pdf
https://riunet.upv.es/bitstreams/baf345fa-326d-4f11-aa52-7655bbb6f4b5/download
https://books.google.com/books/about/Introduction_to_Continuum_Mechanics.html?id=lEhh-hjG6EgC
https://ceae.colorado.edu/~amadei/CVEN5768/PDF/NOTES3.pdf
https://www.civil.northwestern.edu/people/rudnicki/Continuum/cmbook_11_03_2011.pdf