GRUPO 33

FLUJO DE COUETTE ENTRE DOS TUBOS CONCÉNTRICOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Carlos Azcona Ruiz, Alonso Gómez Oliveira, Marcos Gómez Rosillo, Alba Zilu Martinez Toda, María de las Mercedes Oriola Zamora

1.-INTRODUCCIÓN

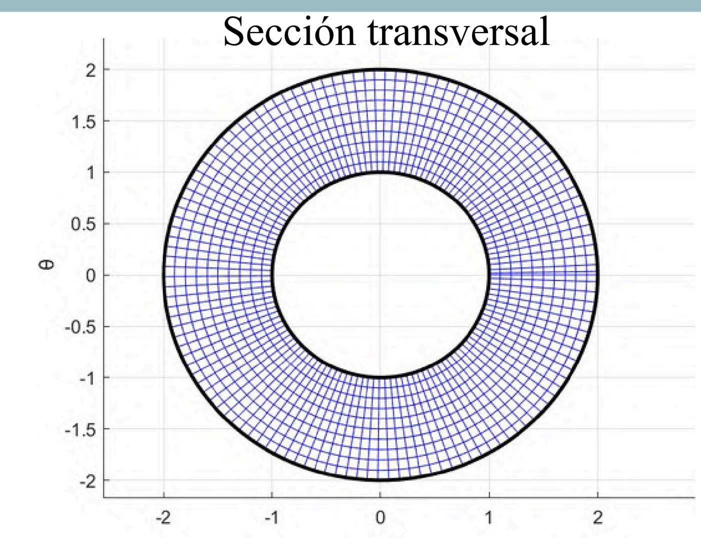
El Flujo de Couette describe el comportamiento de un fluido cuando se encuentra entre dos superficies que se mueven una respecto a la otra.
En nuestro caso:

- El cilindro exterior gira con velocidad angular constante en sentido horario.
- El cilindro interior gira con velocidad angular constante en sentido contrario.

Las proyecciones de los cilindros corresponden a circunferencias de radios y velocidades angulares:

$\rho_{ext}=2;\ w_e=1$

$\rho_{int}=1;\ w_e=-1$



2.-ECUACIÓN NAVIER-STOKES

La velocidad del las partículas viene definida por: $\vec{u}(\rho,\theta)=f(\rho)\,\vec{e_\theta}$
Dicho fluido sigue la **ecuación Navier-Stokes**, describiendo el movimiento de un fluido viscoso.

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=\mu\,\Delta\,\vec{u}$$

Su presión "p" es constante, por ello, su campo gradiente es 0 y se desprecia la parte convectiva ya que no se produce aceleración en el fluido.
Por tanto, la **ecuación obtenida** es: $\mu\,\Delta\,\vec{u}=0$ donde μ es el coeficiente de viscosidad del fluido y

$$\Delta\vec{u}=\frac{1}{\rho}\left[-\frac{f(\rho)}{\rho}+\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho}\right)\right]\vec{e_\theta}$$

Si igualamos y reorganizamos la expresión, obtenemos así la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right)=\frac{f(\rho)}{\rho},\qquad f(\rho)=a\,\rho+\frac{b}{\rho},\qquad a,b\in\mathbb{R},$$

Se ha podido comprobar la anterior igualdad, en la que: $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\left(a-\frac{b}{\rho^2}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a\rho-\frac{b}{\rho}\right)=a+\frac{b}{\rho^2}$
Y el segundo término: $\frac{1}{\rho}\left(a\rho+\frac{b}{\rho}\right)=a+\frac{b}{\rho^2}$

Posteriormente procedemos al cálculo de las constantes a y b, para de tal forma que la velocidad en la frontera coincida con la del tubo exterior e interior.

$$a=\frac{4\omega_e-\omega_i}{3},\qquad b=\frac{4(\omega_i-\omega_e)}{3}.$$

Debemos conocer si el campo de velocidades del **fluido es incompresible**, para ello, se calculará la divergencia, si el resultado es 0, será incompresible, ya que su densidad es constante.

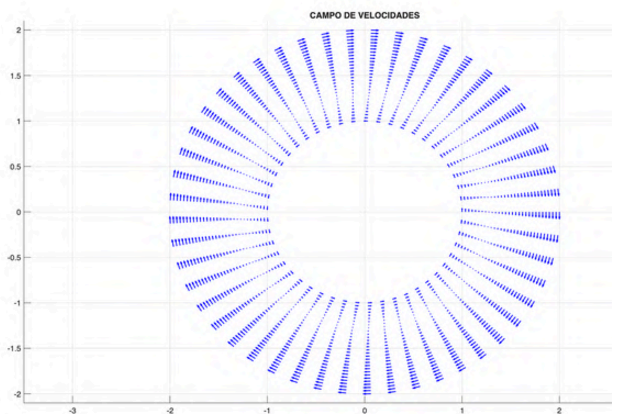
$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\quad\text{donde}\quad u_\rho=0,\quad u_z=0,\quad u_\theta=f(\rho)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(0)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}(0)+0=0$$

3.-CAMPO DE VELOCIDADES

Consideramos por el sentido, $\omega_i=1$ y $\omega_e=-1$.
Suponiendo que $|\vec{\omega}_e|=|\vec{\omega}_i|=1$ y $\mu=1$
Con las constantes calculadas en el apartado anterior, el campo de velocidades queda de la forma:

$$u(\vec{\rho},\theta)=\left(-\frac{5}{3}\rho+\frac{8}{3\rho}\right)\hat{e_\theta}$$



4.-LÍNEAS DEL CAMPO DE CORRIENTE

Para calcular y dibujar las líneas de corriente del campo de velocidades obtenido en el apartado 2:

$$\vec{u}(\rho,\theta)=f(\rho)\,\vec{e_\theta},\ \text{donde}\ f(\rho)=a\rho+\frac{b}{\rho}\ \text{y}\ \vec{e_\theta}=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

Se calcula un campo v, ortogonal a él, donde el vector k es el unitario correspondiente al eje Z en base cartesiana, para así obtener las lineas de corriente de forma más sencilla.

$$\vec{v}(\rho,\theta)=f(\rho)\,(\vec{k}\times\vec{e_\theta})=-f(\rho)\,\vec{e_\rho}=-\left(a\,\rho+\frac{b}{\rho}\right)\vec{e_\rho}$$

Quedando en coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$\vec{v}(x,y)=\left(-\left(a\,\rho+\frac{b}{\rho}\right)\frac{x}{\rho},\ -\left(a\,\rho+\frac{b}{\rho}\right)\frac{y}{\rho}\right)$$

Con el fin de comprobar la irrotacionalidad de este último campo, el cual es radial apuntando hacia −eρ, es necesario cumplir la siguiente condición.

$$\nabla\times\vec{u}(\rho,\theta,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_\rho & \rho u_\theta & u_z\end{vmatrix}=0$$

En referencia a la función de corriente, existe un potencial escalar ψ tal que: $\nabla\psi=\vec{v}$
Resultando en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\vec{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e_\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e_z}$$

Como se ha visto anteriormente, el flujo es radial, por lo que obtenemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=-f(\rho),\quad\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$$

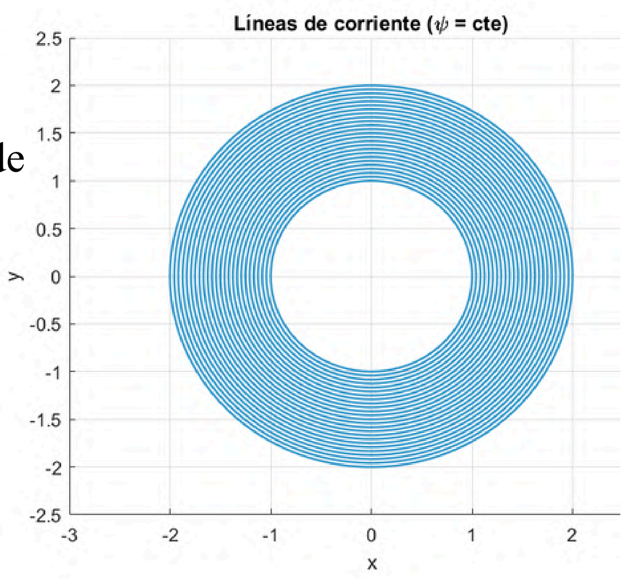
Si *f(ρ)=aρ+b/ρ,* entonces:

$$\psi(\rho)=-\int f(\rho)\,d\rho=-\int\left(a\rho+\frac{b}{\rho}\right)d\rho=-\left(\tfrac{a}{2}\rho^2+b\ln\rho\right)+C$$

Obteniendo finalmente la siguiente expresión para las líneas de campo:

$$\psi(\rho)=-\tfrac{a}{2}\rho^2-b\ln\rho+C$$

Por último, se comprueba que estas líneas son constantes. Basta con observar que ψ depende solo de ρ, por lo que las curvas ψ son constantes y se tratan de circunferencias concéntricas con un radio ρ constante.



5.-MÓDULO DE LA VELOCIDAD

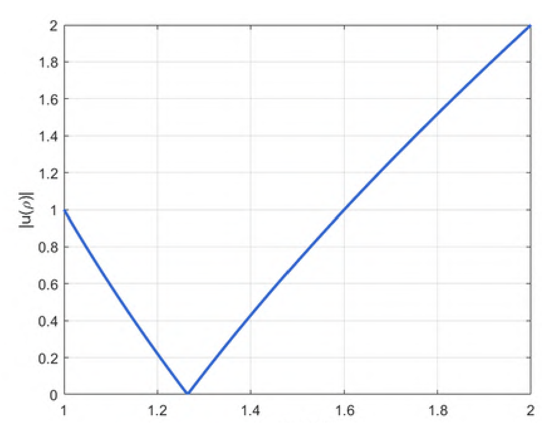
Para hallar los puntos donde el módulo de la velocidad del fluido es máxima, debemos de derivar la función para ver la monotonía.

$$\frac{d}{d\rho}f(\rho)=-\frac{5}{3}-\frac{8}{3\rho^2}.$$

Calculamos los máximos en los extremos del intervalo:

$|f(1)|=1\qquad|f(2)|=2$

Se observa grafica y analiticamente que el módulo de la velocidad es máximo en ρ=2 con: |u|=2.



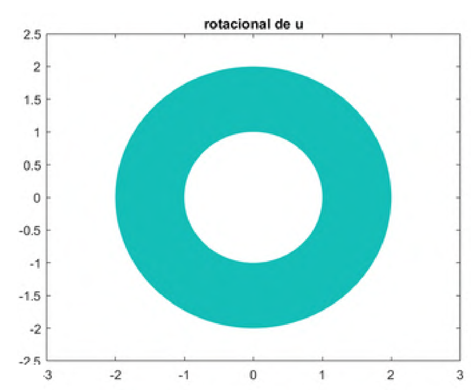
6.-ROTACIONAL DE U

Por definición el rotacional se calcula como: $\nabla\times\vec{u}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_\rho & \rho u_\theta & u_z\end{vmatrix}$

En nuestro caso: $\nabla\times\vec{u}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \rho\left(a\rho+\frac{b}{\rho}\right) & 0\end{vmatrix}$

Obtenemos: $(\nabla\times\vec{u})=\frac{1}{\rho}(2a\rho)\mathbf{e}_z=2a\mathbf{e}_z\qquad\nabla\times\mathbf{u}=(0,0,2a)$

Con $a=-\frac{5}{3}$, obtenemos que el rotacional es: $\nabla\times\mathbf{u}=(0,0,-\frac{10}{3})\approx(0,0,-3.33)$.



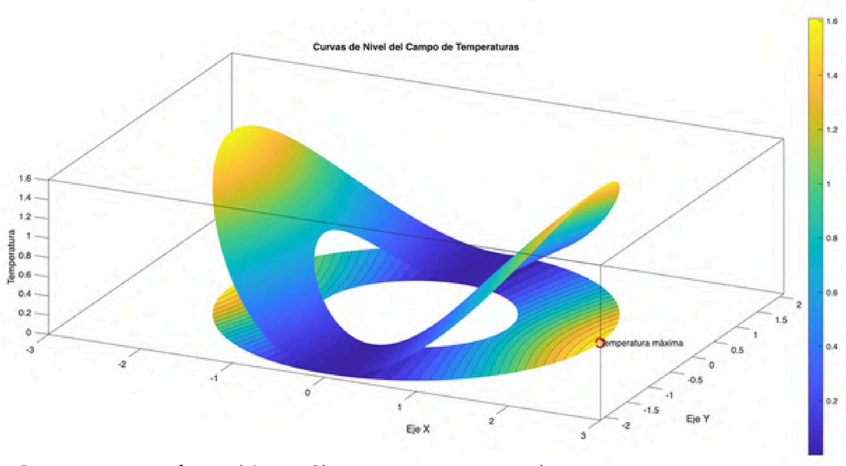
Todos los puntos tienen el mismo rotacional, porque el flujo depende únicamente de θ en la base de coordenadas cilíndricas y la derivada radial genera un valor constante.

7.-CAMPO DE TEMPERATURAS Y CURVAS DE NIVEL.

Trabajaremos en la sección transversal y dentro del fluido (anillo $1\le\rho\le2$).
La temperatura viene dada por la función:

$$T(\rho,\theta)=\log\left(1+\rho^2\right)\,\cos^2\theta.$$

Debido a la complejidad de derivación de la expresión resulta mas sencillo analizar los componentes que la conforman.



- Tomamos el mayor valor radial permitido: ρ=2 porque log(1+ρ²) crece con ρ).
- Tomamos el mayor valor angular: cos²θ=1 que ocurre únicamente en los valores θ=0 o θ=π

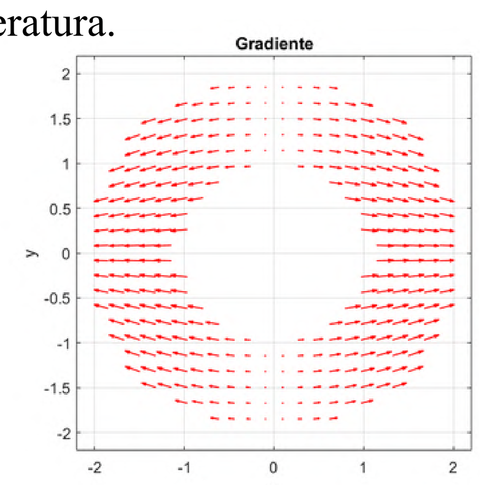
Por tanto, el punto máximo de T en el anillo se da en ρ=2, este se aprecia gráficamente.

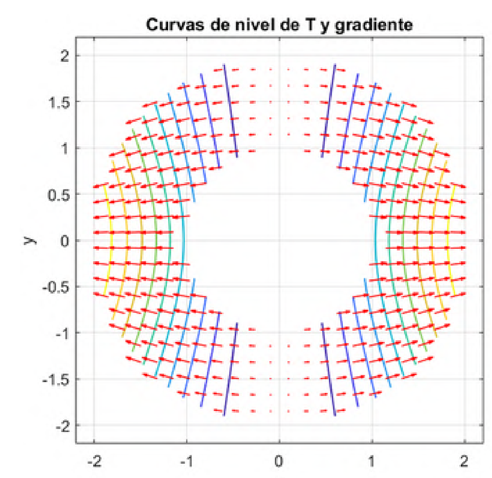
8.-GRADIENTE DE LA TEMPERATURA

El cálculo del gradiente de la temperatura da como resultado:

$$\nabla T=T_\rho\mathbf{e}_\rho+T_\theta\mathbf{e}_\theta=\left(2\rho(1+\rho^2\cos2\theta)\right)\mathbf{e}_\rho+\left(-\frac{1}{\rho}\log(1+\rho^2)\sin(2\theta)\right)\mathbf{e}_\theta$$

Se comprueba gráficamente la perpendicularidad del campo gradiente con respecto a las líneas de nivel de la temperatura.

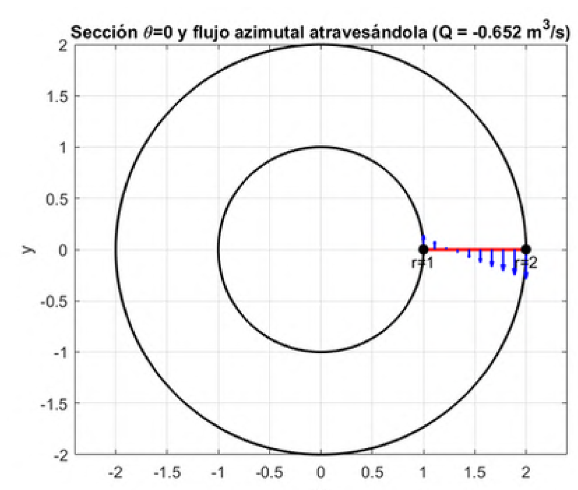


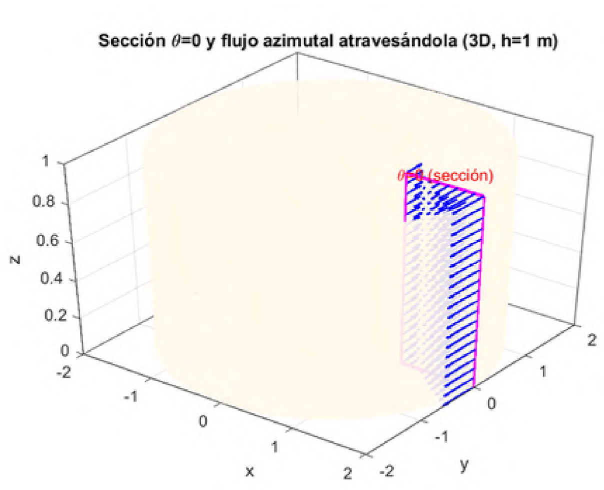


9.-CAUDAL QUE PASA POR UNA SECCIÓN θ= 0

Supongamos que la velocidad está en m/s y que los cilindros tienen una profundidad de 1m.
El caudal se calcula como: $Q=\int_{\rho=1}^{\rho=2}u_\theta(\rho)\,h\,d\rho,$

Quedando en el caudal final $=-0.652\ \mathrm{m^3/s}$. $Q=\int_1^2\left(a\rho+\frac{b}{\rho}\right)d\rho$
El signo negativo indica que el flujo atraviesa la sección en sentido horario





10.-BIBLIOGRAFÍA

Microsoft. (2025). Microsoft Copilot. Recuperado de https://copilot.microsoft.com
Wikimedia Foundation. (2025). Wikipedia. Recuperado de https://www.wikipedia.org
Apuntes Tema 2. Campos tensoriales y operadores diferenciales. Proporcionados por los profesores de la asignatura