

Resumen

En este póster, vamos a tratar de visualizar las series de Fourier y comprender cómo estas son capaces de aproximar funciones. A su vez, realizaremos un análisis numérico de la convergencia de la serie de Fourier hacia la función a aproximar. Para la generación de las gráficas hemos utilizado códigos de Python que se aportarán al final de la página.

Contexto

Trabajaremos en el espacio de funciones L^2 definido sobre un conjunto Ω , $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}$. Con producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

En dicho espacio, podemos hallar una base ortonormal; por ejemplo, la conocida base trigonométrica:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n \geq 1}.$$

Y por tanto, cualquier función $f \in L^2(-L, L)$ se puede expresar como:

$$f(x) \sim \frac{c_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + d_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

Donde c_n, d_n son los coeficientes de Fourier. Y pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2L}} \rangle, \\ c_n &= \langle f(x), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle, \\ d_n &= \langle f(x), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rangle. \end{aligned}$$

Aproximación

Comportamiento de los elementos de la base:

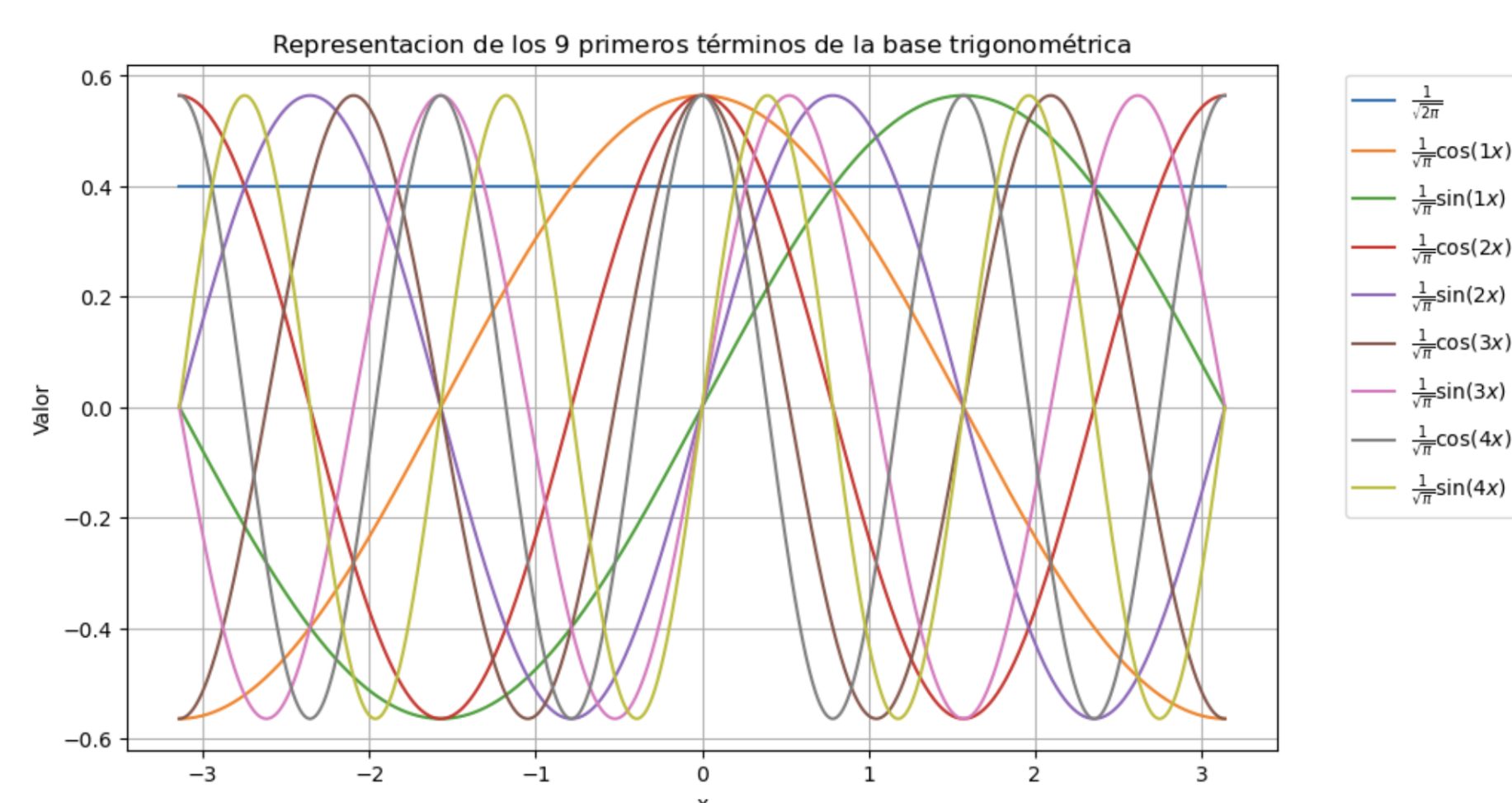
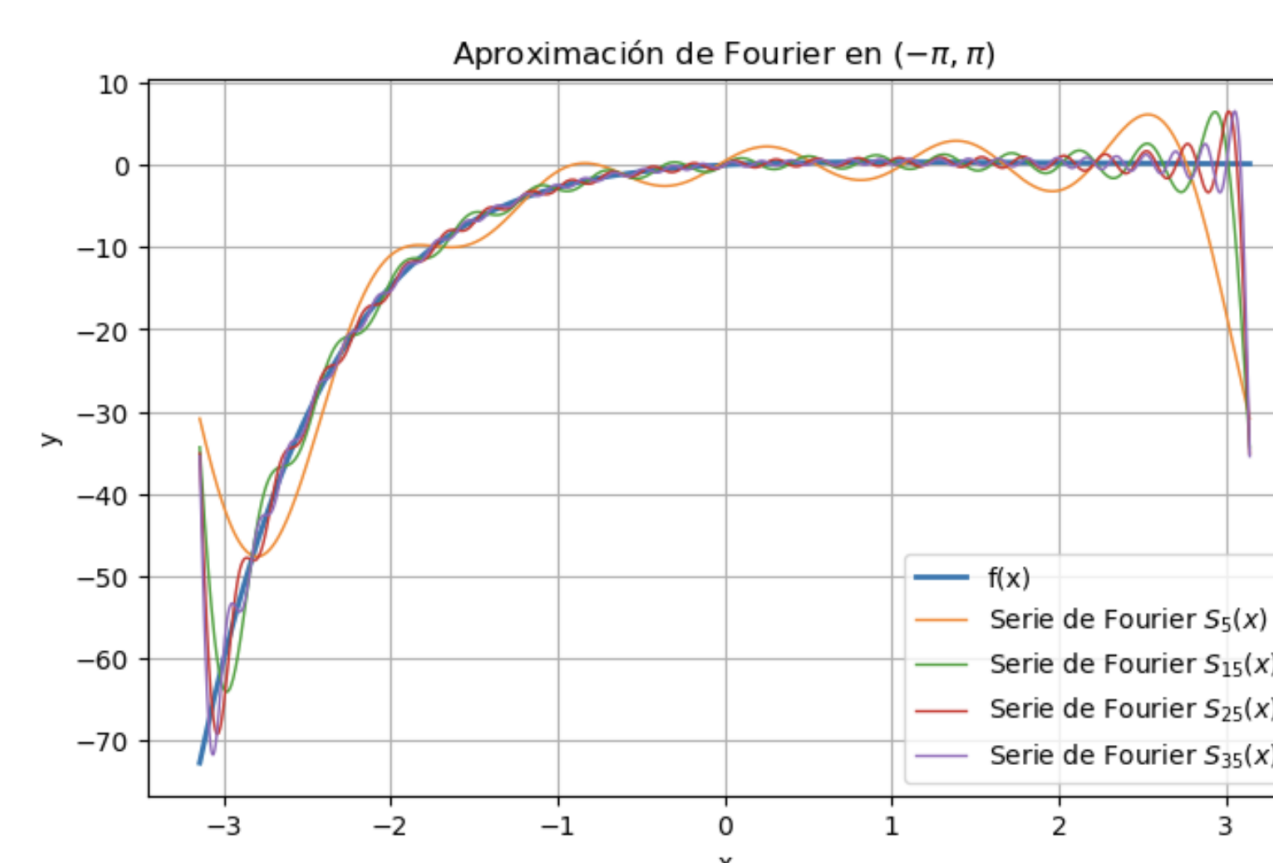


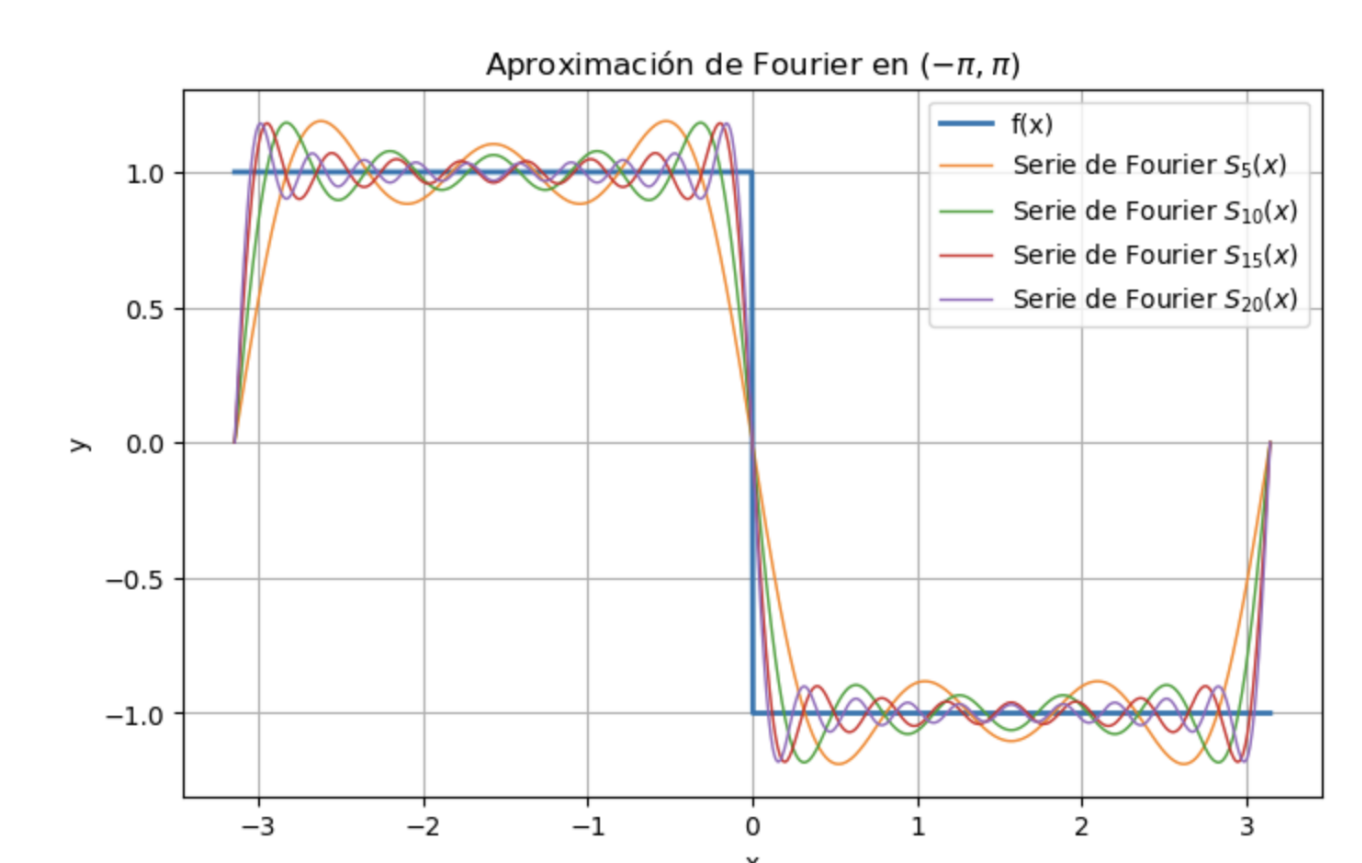
Figura 1: 9 primeros elementos

Las series de Fourier son muy útiles para aproximar funciones. La forma de hacer esto es calculando un número finito de coeficientes de Fourier, y estimar la función como la suma parcial de la serie correspondiente. A continuación, aproximaremos diferentes funciones mediante su serie Fourier. En particular, las funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{-x} \\ g(x) &= \begin{cases} 1 & -\pi < x \leq 0, \\ -1 & 0 < x < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$



(a) Aprox. f



(b) Aprox. g

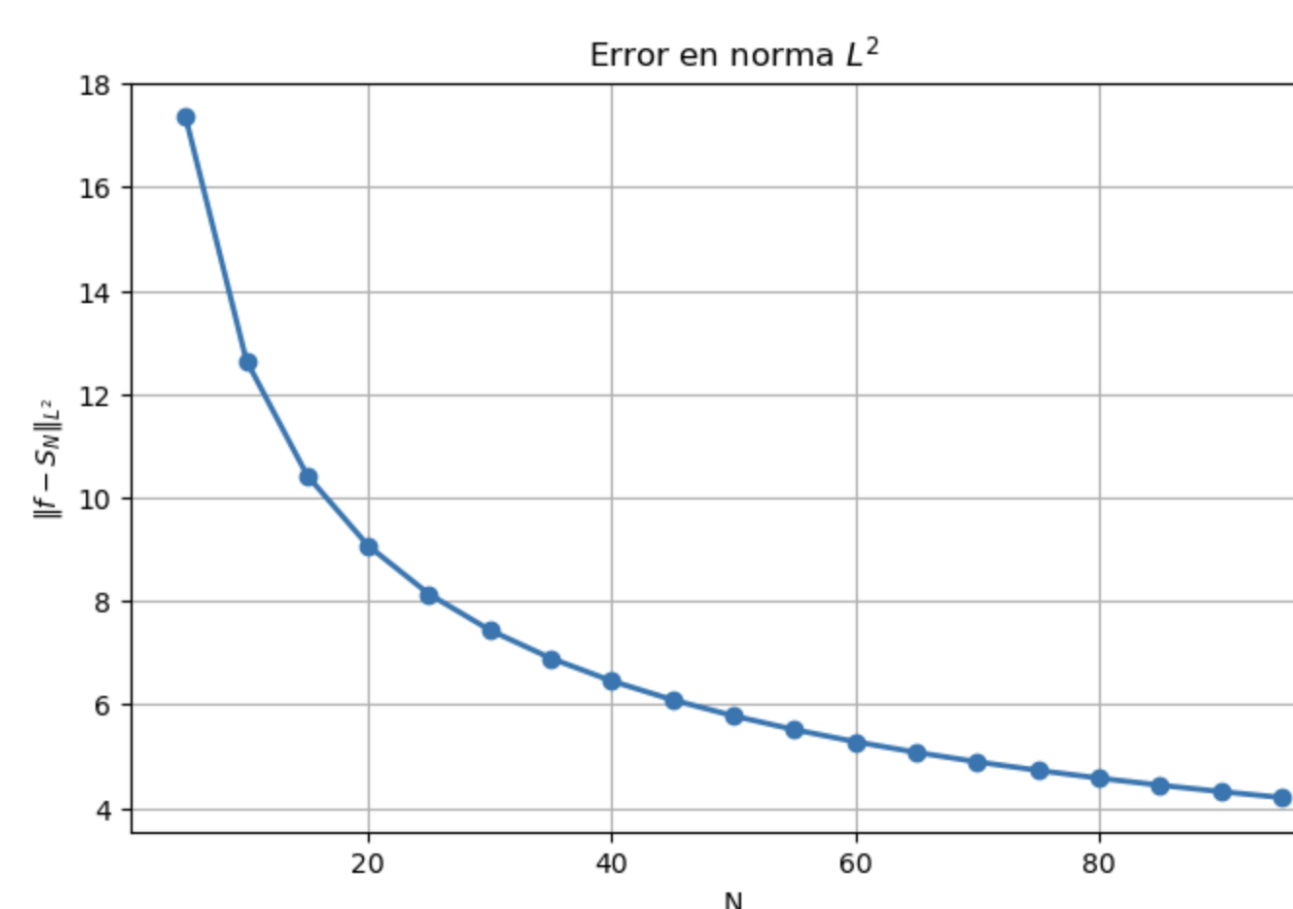
Figura 2: Representación de f y g , y sus aproximaciones mediante Fourier.

Errores e interpretaciones

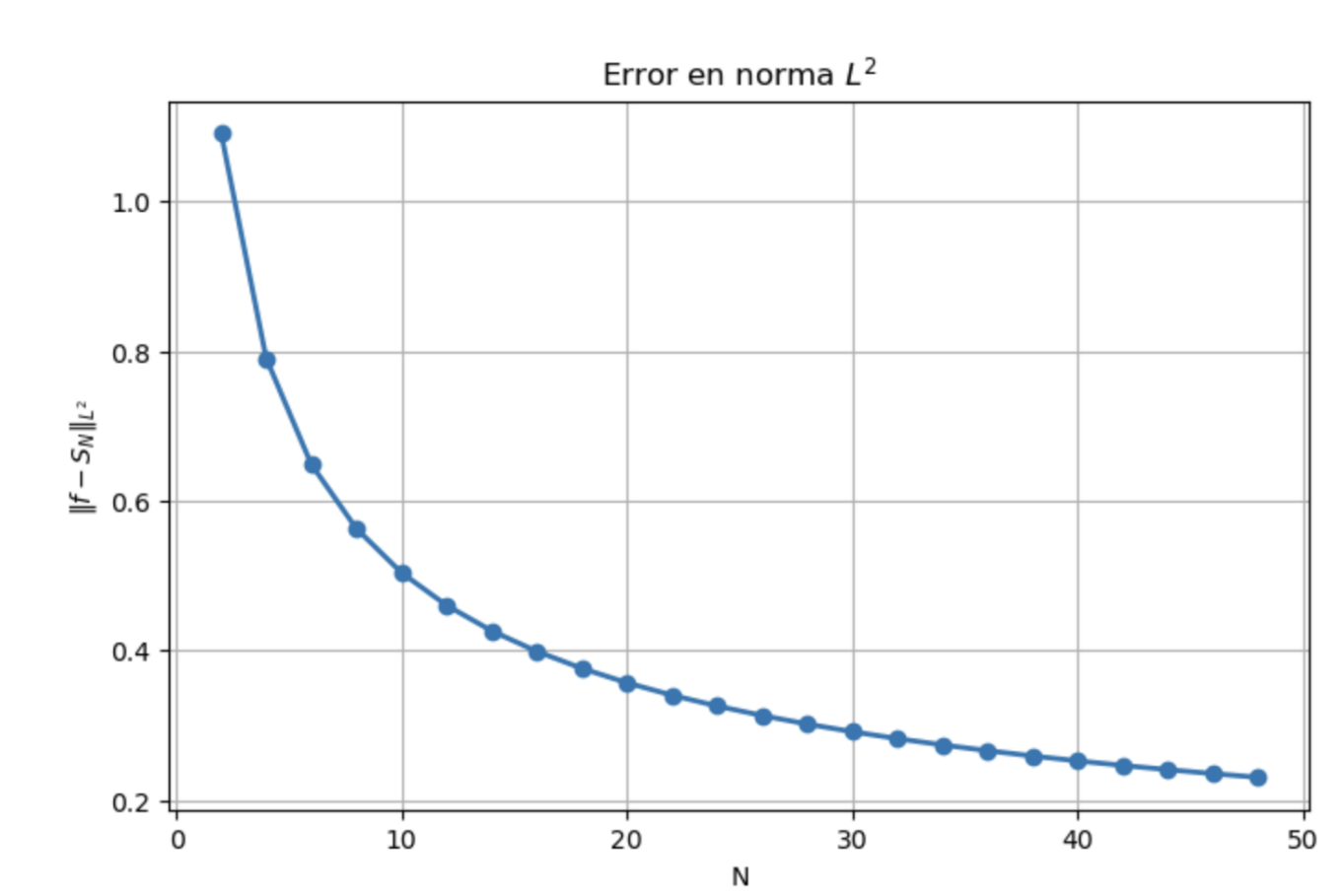
Para los cálculos de los errores obtenidos en la aproximación, tomaremos la métrica de $L^2(-\pi, \pi)$:

$$E_N = \|f - S_N\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

donde S_N es la aproximación de f usando $2N + 1$ términos de la serie de Fourier. A continuación, se muestran las gráficas que representan el error de aproximación en función del número de términos de la serie de Fourier usados en cada aproximación.



(a) Error f.



(b) Error g.

Figura 3: Errores de aproximación en función del número de términos de la serie de Fourier.

Este margen de error refleja nuevamente la buena aproximación que presentan las series de Fourier.