Flujo de Couette entre dos tubos concéntricos

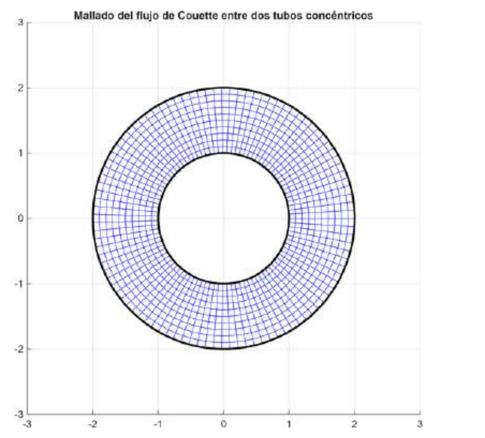
UPM
ETSICCP

1.Introducción

El objetivo de este proyecto es estudiar el comportamiento de un fluido incompresible cuyo flujo esta definido por dos cilindros concéntricos que rotan (suponiendo eje de giro el eje OX3) en direcciones opuestas a velocidades no definidas.

El cilindro exterior de radio ρ=2 se mueve a una velocidad angular ωe en sentido horario, el cilindro interior de radio ρ=1 tiene una velocidad angular ωi en sentido antihorario.

La grafica de la derecha representa la seccion transversal de los tubos donde la malla interior refleja los puntos ocupados por el fluido.



2.Cálculo de las velocidades

2.1.Cálculo del Laplaciano del campo de velocidades

Se sabe que la velocidad de las partículas viene dada por el vector u(ρ,θ)=f(ρ)eθ y que su presión P es constante.
Además el campo de velocidades tiene que cumplir la ecuación de Navier-Stokes estacionaria:

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla\rho=\mu\,\Delta\,\vec{u}$$

en la que μ es el coeficiente de viscosidad del fluido, y donde vamos a despreciar el primer término (parte convectiva).
Obteniendo así: $\mu\,\Delta\,\vec{u}=\vec{0}$

Para el cálculo del laplaciano vectorial en coordenadas cartesianas tenemos la siguiente formula:

$$\Delta\vec{u}=\Delta(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})=\Delta u_1\vec{i}+\Delta u_2\vec{j}+\Delta u_3\vec{k}$$

Pero en este ejercicio el campo de velocidades está dado en la base cilíndrica, así que utilizaremos:

$$\Delta\vec{u}=\nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$$

Separamos por partes, el primer sumando trata de un gradiente de la divergencia y en nuestro caso nos dará nulo ya que es un fluido incomprensible y la divergencia mide el cambio en la densidad de un fluido a medida que se desplaza a través de un campo vectorial.

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(0)+\frac{\partial}{\partial\theta}(f(\rho))+\frac{\partial}{\partial z}(0)=0$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u})=\nabla(0)=\vec{0}$$

En la segunda parte se calculará el rotacional del rotacional del campo de velocidades y tendremos que sustituir en la definición de Laplaciano ($\Delta\vec{u}=\nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$)

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{u})=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e_\rho} & \rho\vec{e_\theta} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & [\frac{f(\rho)}{\rho}+\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho}]\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}[\frac{f(\rho)}{\rho}-\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho})]\vec{e_\theta}$$

2.2.Sustituir en la ecuacion de Navier-Stokes

Luego volviendo a la ecuación de Navier–Stokes en un caso donde los términos convectivos y de presión son nulos, reduce la ecuación a:

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=\mu\,\Delta\,\vec{u}\longrightarrow\Delta\vec{u}=\vec{0}$$

Y finalmente se llega a la expresión: $[-\frac{f(\rho)}{\rho}+\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho})]\vec{e_\theta}=\vec{0}$

Que despejando, se obtiene la ecuación diferencial $\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho})=\frac{f(\rho)}{\rho}$ que equivale a la ecuación dada por el enunciado.

2.3.Comprobación de la función f(ρ)

Se nos facilita la función f(ρ) que si cumple la igualdad de la ecuación diferencial equivaldría al modulo del campo de velocidades $\vec{u}$.

$$f(\rho)=a\rho+\frac{b}{\rho},\qquad a,b\in\mathbb{R}$$

Y obteniendo las derivadas que aparecen en la ecuación y sustituyendo tenemos que si cumple ya que:

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}=a-\frac{b}{\rho^2},\quad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho})=a+\frac{b}{\rho^2}\longrightarrow\frac{1}{\rho}(a\rho+\frac{b}{\rho})=a+\frac{b}{\rho^2}\Longrightarrow\frac{f(\rho)}{\rho}=\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial(f(\rho))}{\partial\rho})$$

2.4.Obtención de los valores a,b

Para obtener los valores a y b vamos a considerar que los módulos de las velocidades angulares de los cilindros deben ser proporcionales entre sí, para ello imponemos las siguientes condiciones:

$$\begin{matrix}|\vec{\omega_i}|=\omega\ (\text{antihorario})\\ |\vec{\omega_e}|=n\omega\ (\text{horario})\end{matrix}\quad\begin{cases}\vec{\mathbf{u}}(\rho=1)=\omega\vec{\mathbf{e}_\theta}\\ \vec{\mathbf{u}}(\rho=2)=-2n\omega\vec{\mathbf{e}_\theta}\end{cases}$$

Además: $\begin{cases}\vec{\mathbf{u}}(\rho=1)=(a\rho+\frac{b}{\rho})\vec{\mathbf{e}_\theta}=(a+b)\vec{\mathbf{e}_\theta}\\ \vec{\mathbf{u}}(\rho=2)=(a\rho+\frac{b}{\rho})\vec{\mathbf{e}_\theta}=(2a+\frac{b}{2})\vec{\mathbf{e}_\theta}\end{cases}$

Llegando así a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas del que podemos despejar a y b, finalmente viendo que a y b equivalen a:

$$a=-\frac{1}{3}(4n+1)\omega\qquad b=\frac{4}{3}(n+1)\omega$$

Y finalmente el campo de velocidades $\vec{u}$ queda definido como:

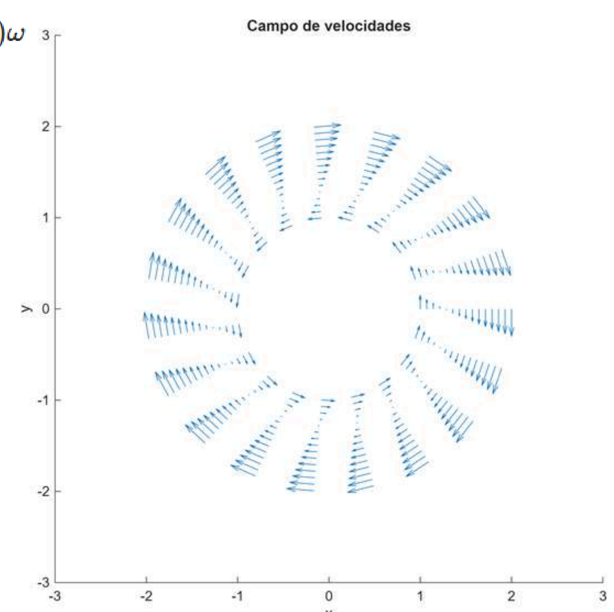
$$\vec{\mathbf{u}_\rho}=-[\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho-\frac{4}{3}(n+1)\omega\frac{1}{\rho}]\vec{\mathbf{e}_\theta}\text{ tal que }\begin{cases}|\vec{\omega_i}|=\omega\ (\text{antihorario})\\ |\vec{\omega_e}|=n\omega\ (\text{horario})\end{cases}$$

3.Campo de velocidades

Suponiendo los valores $|\vec{\omega}_e|=|\vec{\omega}_i|=1$ y $\mu=1$, los parámetros $a=-\frac{1}{3}(4n+1)\omega$ y $b=\frac{4}{3}(n+1)\omega$ (obtenidos en el apartado anterior) pasaran a valer:

$$a=-\frac{5}{3},\quad b=\frac{8}{3},\quad \text{y por tanto:}\quad f(\rho)=-\frac{5}{3}\rho+\frac{8}{3\rho}$$

Generando así el campo vectorial $\vec{u}=-\frac{5}{3}\rho+\frac{8}{3\rho}\vec{e_\theta}$ que designa el campo de velocidades representado a la derecha, donde se puede apreciar el efecto que se produce al girar los cilindros en sentidos opuestos, que provoca que el fluido no se desplace en una zona del interior. También, se observa que la velocidad del cilindro exterior es mayor que la del interior cosa que tiene sentido ya que el cilindro exterior tiene mayor radio.



4. Lineas de corriente

Las líneas de corriente son aquellas tangentes al campo $\vec{u}$ en cada punto, que muestran las trayectorias que siguen las partículas del fluido. Para poder estudiar las líneas de corriente del fluido usaremos la velocidad (campo $\vec{u}$) y el campo binormal de $\vec{u}$ ($\vec{\mathbf{k}}$). Esto nos permite obtener el campo vectorial $\vec{\mathbf{v}}=\mathbf{k}\times\vec{\mathbf{u}}$, que es ortogonal a $\vec{u}$ en cada punto y resulta en:

$$\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{u}}=-[\frac{4}{3}(n+1)\omega\frac{1}{\rho}-\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho]\vec{\mathbf{e}_\rho}$$

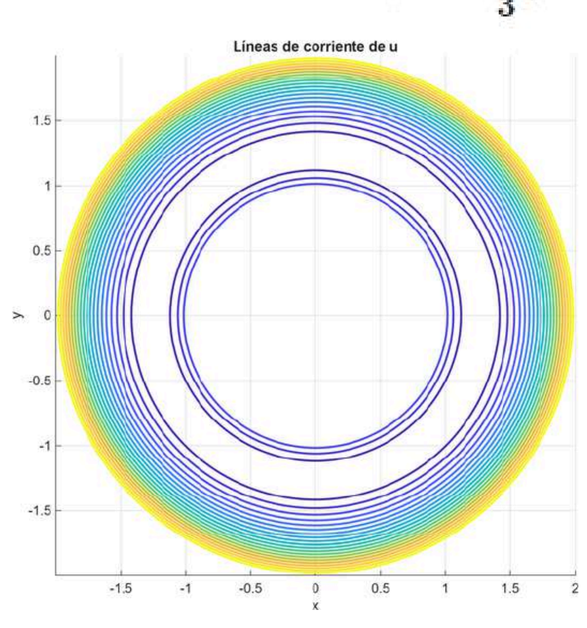
Ya obtenido el vector $\vec{\mathbf{v}}$, se ha de comprobar que este es irrotacional, que debería serlo ya que la divergencia de $\vec{u}$ es nula (comprobado en el apartado anterior):

$$\nabla\times\vec{v}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\cdot\vec{e}_\theta & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -[\frac{4}{3}(n+1)\omega\frac{1}{\rho}-\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho]\vec{\mathbf{e}_\rho} & 0 & 0\end{vmatrix}=\vec{0}$$

Esto nos permite poder estudiar el potencial escalar del vector $\vec{\mathbf{v}}$, ya que este es el gradiente de la función de corriente de $\vec{u}$ (ψ). Al ser solo dependiente de ρ, la función ψ se obtiene con la integral parcial sobre ρ del modulo de $\vec{\mathbf{v}}$, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\vec{v}=\nabla\psi\Longrightarrow-[\frac{4}{3}(n+1)\omega\frac{1}{\rho}-\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho]\vec{\mathbf{e}_\rho}=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z\Longrightarrow\psi=\int-[\frac{4}{3}(n+1)\omega\frac{1}{\rho}-\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho]\vec{\mathbf{e}_\rho}\,\partial\rho$$

$$\psi=-\frac{4}{3}(n+1)\omega\cdot ln(\rho)+\frac{1}{3}(4n+1)\omega\cdot\frac{\rho^2}{2}+C,C\in R$$



Finalmente para representar las líneas de corriente del campo $\vec{u}$ consideramos las velocidades angulares dadas $|\vec{\omega}_e|=|\vec{\omega}_i|=1$, donde la función obtenida se quedaría como:

$$\psi=\frac{5}{6}\rho^2-\frac{8}{3}ln\rho$$

La grafica de la izquierda muestra las líneas de corriente del fluido (teniendo den cuenta las velocidades dadas) que son las curvas donde la función ψ es constante. En la representación se puede apreciar que en una zona del interior no hay corriente cosa que tiene sentido ya que cercana a esa zona la velocidad va disminuyendo hasta un punto donde es nula.

5. Velocidad máxima del fluido

Para calcular la velocidad máxima del fluido se usará el modulo de su velocidad. Este máximo se podrá encontrar en dos posibles partes, el interior de la cavidad o el borde de la cavidad, en la que la velocidad viene dada por el giro de los cilindros. La derivada del campo velocidad es la siguiente:

$$|\vec{u}(\rho)|=\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho-\frac{4}{3}(n+1)\omega\cdot\frac{1}{\rho}\qquad\frac{\partial}{\partial\rho}|\vec{u}(\rho)|=\frac{1}{3}(4n+1)\omega+\frac{4}{3}(n+1)\omega\cdot\frac{1}{\rho^2}$$

Esta derivada es diferente de cero en el intervalo de la cavidad, por lo que el máximo se encontrará en las paredes de los cilindros. Al no haber una velocidad o proporción de velocidades definida, el máximo dependerá de la proporción de velocidad de los cilindros, dando a las siguientes posibilidades

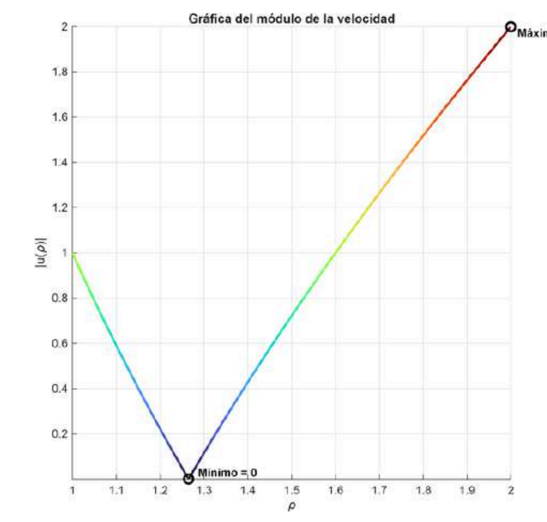
$$|\vec{u}(\rho=1)|=\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho-\frac{4}{3}(n+1)\omega\cdot\frac{1}{1}=\omega\qquad|\vec{u}(\rho=2)|=\frac{1}{3}(4n+1)\omega\rho-\frac{2}{3}(n+1)\omega=2n\omega$$

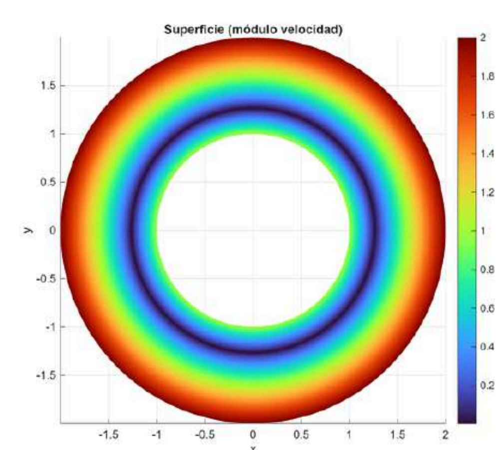
$$|\vec{u}(\rho=1)|>|\vec{u}(\rho=2)|\text{ si }n<\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{\omega_e}<\frac{1}{2}\vec{\omega_i}\Rightarrow\text{ Máx en }|\vec{u}(\rho=1)|$$

$$|\vec{u}(\rho=1)|<|\vec{u}(\rho=2)|\text{ si }n>\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{\omega_e}>\frac{1}{2}\vec{\omega_i}\Rightarrow\text{ Máx en }|\vec{u}(\rho=2)|$$

$$|\vec{u}(\rho=1)|=|\vec{u}(\rho=2)|\text{ si }n=\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{\omega_e}=\frac{1}{2}\vec{\omega_i}\Rightarrow\text{ Máx en }|\vec{u}(\rho=1)|\text{ y }|\vec{u}(\rho=2)|$$

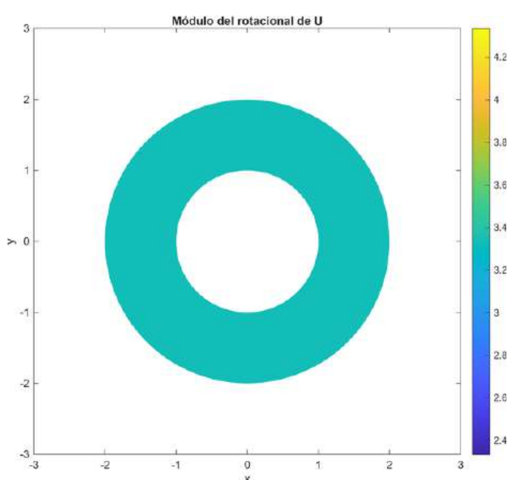
Es de comentar que aun no habiendo un maximo interior, si se encuentra un mínimo en el punto en el que la velocidad es cero, al cancelarse la producida por el cilintro interior y exterior. Esto se puede ver en la grafica adjunta, en la que se muestran las velocidades segun los datos aportados.





6. Rotacional del campo velocidad

El rotacional del campo de velocidades permite entender la tendencia a rotar. Este se halla con la formula del rotacional teniendo en cuenta que estamos trabajando en coordenadas cilindricas por lo que se debe aplicar el factor de escala, en el caso de este fluido, es constante para todos los puntos de la cavidad. Dicha formula y su resultado son los siguientes:

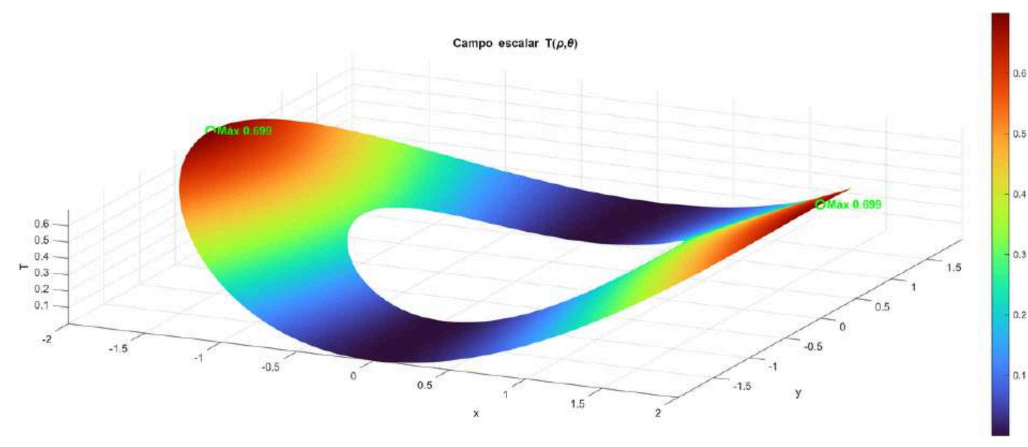


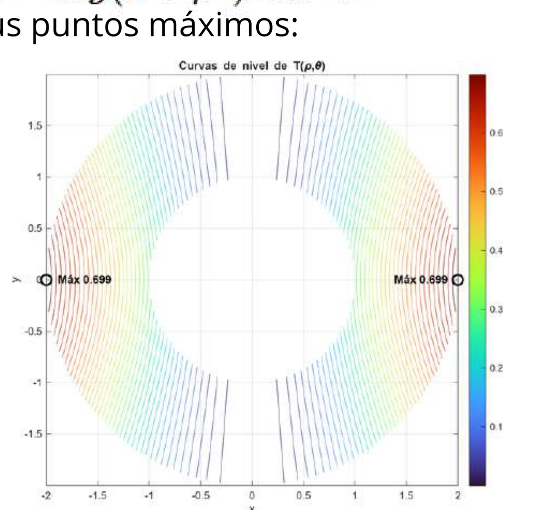
$$\nabla\times\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & (\rho\vec{e}_\theta) & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_\rho & \rho u_\theta & u_z\end{vmatrix}=\left[-\frac{2}{3}(4n+1)\omega\right]\vec{e_z}$$

Con las velocidades angulares de ambos cilindros unitarias tenemos que ese valor constante es $|\nabla\times\mathbf{u}|=\frac{10}{3}$ por lo que todos los puntos tienen el mismo valor rotacional algo que es razonable debido a que el fluido gira en torno a un eje central provocando que todas las partículas de fluido sientan la misma intensidad de giro.

7.Campo de Temperaturas

La temperatura del fluido viene definida por el siguiente campo: $T(\rho,\theta)=log(1+\rho^2)\cos^2\theta$, que se ha representado junto con sus curvas de nivel para analizar donde se sitúan sus puntos máximos:





Tanto en las graficas como en las curvas de nivel se puede apreciar claramente que los puntos maximos se situan en dos extremos de la grafica donde T=0,699 que se da en ρ=2 y $\theta=\{0,\pi\}$ (El valor de los puntos fue calculado gráficamente usando Matlab).

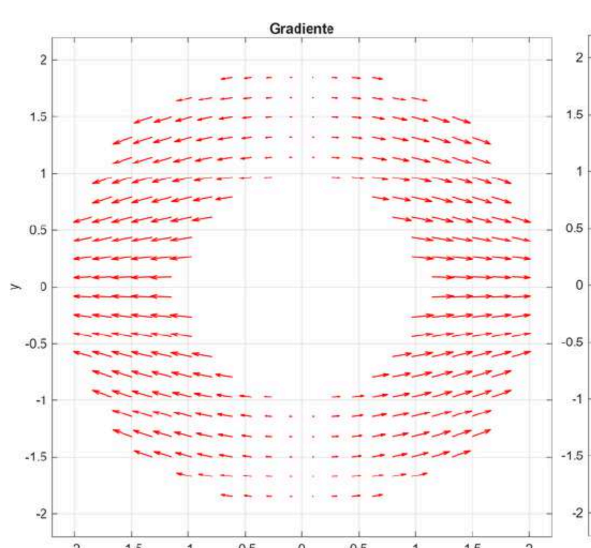
8. Gradiente de la temperatura

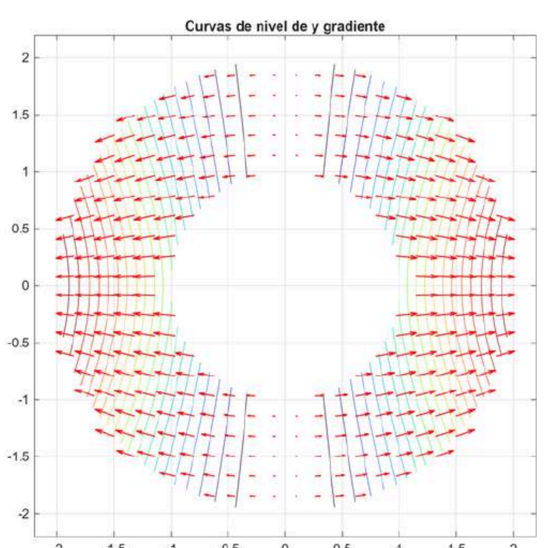
Primero calculamos el gradiente de la funcion de temperaturas T teniendo en cuenta que se trata de una funcion en coordenadas cilindricas y por tanto es necesario aplicar el factor de escala:

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial\rho}\vec{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\theta}\vec{e_\theta}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\nabla T(\rho,\theta)=\cos^2\theta\cdot\frac{2\rho}{(1+\rho^2)ln10}\cdot\vec{e}_\rho-\frac{\log(1+\rho^2)\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\rho}\cdot\vec{e}_\theta$$

Graficamente se puede apreciar claramente como el campo gradiente de temperaturas efectivamente es ortogonal a las curvas de nivel de la funcion T, por lo que los vectores del campo gradiente indican la direccion de maximo crecimiento de la funcion T.





9. Caudal que pasa por la sección θ=0

Hallar el caudal del fluido según una sección cualquiera radial es trivial, ya que el modulo de la velocidad, componente clave, solo depende de la base del área de integración, es decir el intervalo de ρ de la sección. Esto permite que la integral doble de la velocidad sobre el área se reduzca a una integral simple por la altura de los cilindros, dando la siguiente formula:

$$Q=\int_A u_\theta(\rho)\,dA=\int_{z=0}^{z=1}\int_{\rho=1}^{\rho=2}u_\theta(\rho)\,d\rho dz=-\frac{1}{2}(4+1)\omega+\frac{4}{3}(n+1)\omega\cdot ln(2)$$

Teniendo en cuenta los datos de velocidades facilitados, tenemos que el caudal es:

$$Q=-2.5+\frac{8}{3}\ln 2\longrightarrow Q=-0.652\ \mathrm{m^3/s}$$

Autores: Brisa Mora, Alejandro Morales, Nicolás López, Adrián Muñoz

Grupo 50