

Fenómeno de Gibbs: comparación entre sumas parciales y Cesàro

Paula Blanco · Covadonga Díaz · Claudia Pozurama

Ecuaciones en Derivadas Parciales
Universidad Politécnica de Madrid

OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es analizar la aproximación de una función discontinua mediante su serie de Fourier y estudiar el fenómeno de Gibbs que aparece en este proceso. En particular, buscamos responder a la siguiente pregunta:

¿Mejora la aproximación de Fourier al utilizar sumas de Cesàro en lugar de las sumas parciales clásicas?

Analizaremos la convergencia puntual, la ausencia de convergencia uniforme y compararemos numéricamente ambos métodos.

FUNCIÓN A ESTUDIAR

Se ha elegido la siguiente función debido a la presencia de discontinuidades claras, lo que facilita la visualización del fenómeno de Gibbs.

$$f(x) = \text{sign}(\sin(2\pi x))$$

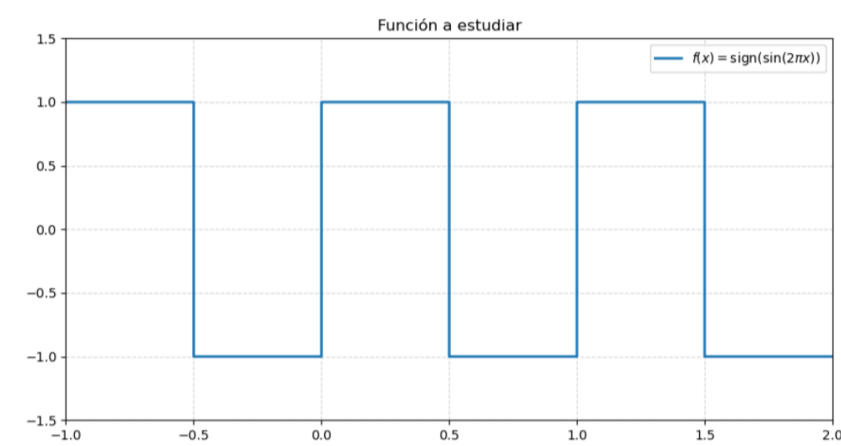
Es periódica (periodo 1) y tiene dos discontinuidades por periodo. Basta estudiar el comportamiento en el intervalo fundamental $[0, 1)$ que toma los valores

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \xrightarrow{z = \sin(2\pi x)} \text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

Las discontinuidades ocurren cuando $\sin(2\pi x) = 0$, es decir,

$$x = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En $[0, 1)$ la discontinuidad interior está en $x = \frac{1}{2}$ (y por periodicidad también en $x = 0 \equiv 1$).



Serie de Fourier asociada. Se observa en la gráfica que tenemos una función impar por lo tanto en la serie de Fourier $a_0 = 0$ y $a_n = 0$, tratando así solo con términos sinusoidal. En concreto,

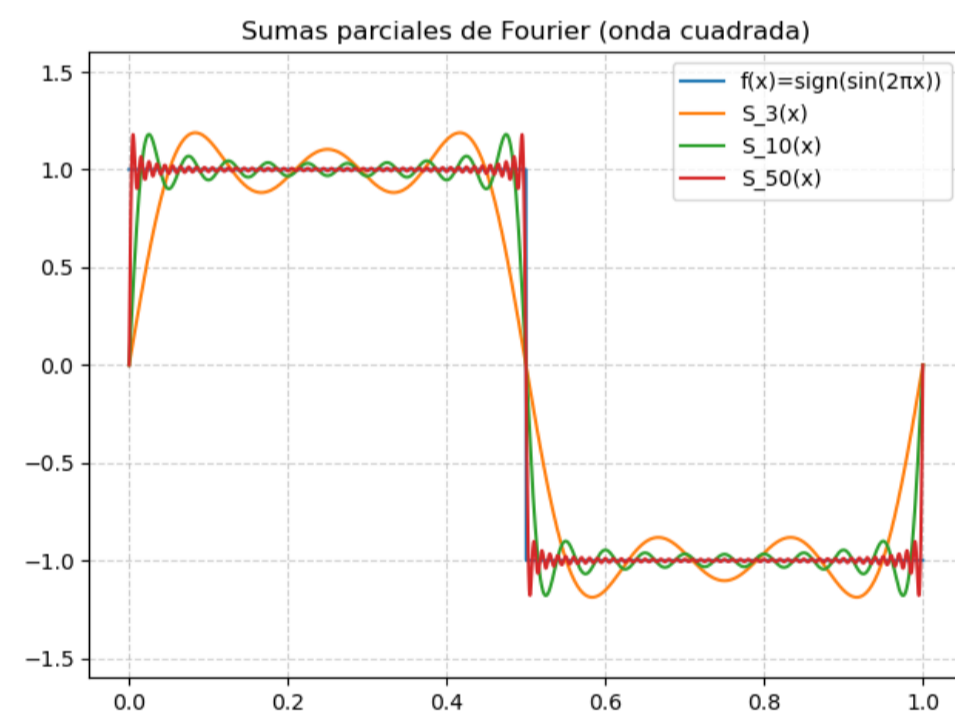
$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ impar,} \\ 0 & n \text{ par,} \end{cases} \text{ por tanto } f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2\pi(2m-1)x).$$

SUMAS PARCIALES

Las sumas parciales son las series de Fourier truncadas en un número finito de términos N

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(2\pi n x) = \sum_{m=1}^N \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2\pi(2m-1)x)$$

La siguiente gráfica muestra las sumas parciales para $N = 3$, $N = 10$ y $N = 50$, donde se observa que a medida que N aumenta la aproximación mejora en los puntos de continuidad. Sin embargo, cerca de las discontinuidades aparecen oscilaciones persistentes.



En aquellos puntos donde la función es continua, se observa claramente que, al aumentar N , las sumas parciales se aproximan cada vez más a la función original (representada en azul). En particular, $S_N(x) \rightarrow f(x)$, lo que implica convergencia puntual en los puntos de continuidad. Además, en cualquier intervalo cerrado que no contenga la discontinuidad, el error máximo en dicho intervalo tiende a cero cuando N aumenta, por lo que la convergencia es uniforme local.

Sin embargo, al acercarnos a la discontinuidad el comportamiento cambia de forma significativa.

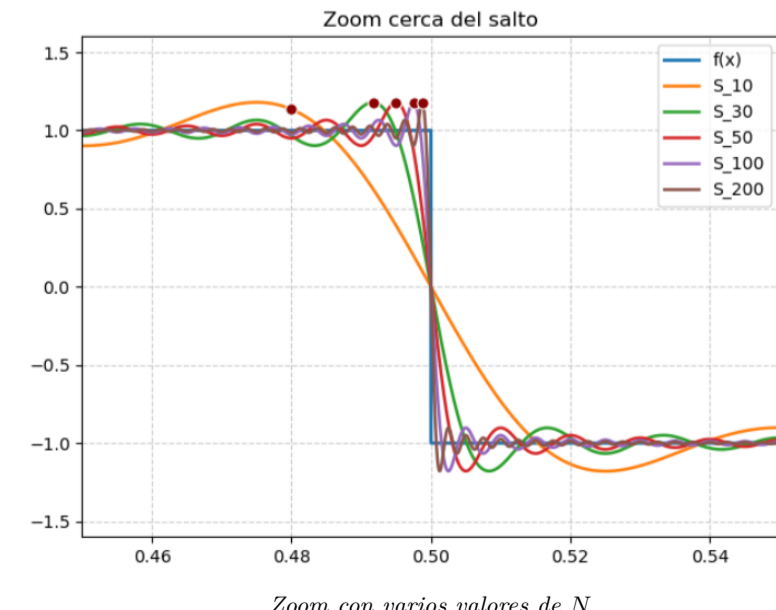
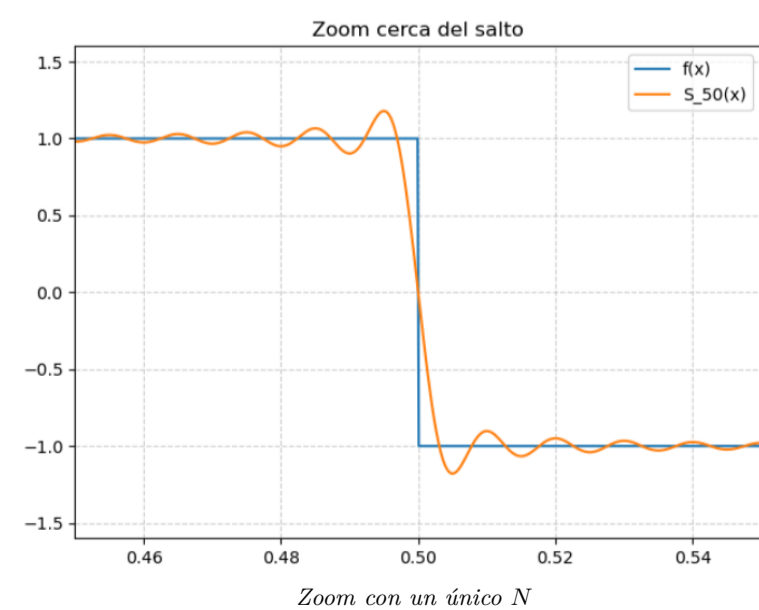
Comportamiento cerca de la discontinuidad: Desde el punto de vista de la convergencia puntual, en el punto de salto x_0 las sumas parciales no convergen al valor de la función, sino al punto medio entre los límites laterales:

$$S_N(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

En nuestro caso, como el salto es de 1 a -1, el límite en la discontinuidad es 0, que es el punto medio entre ambos valores.

Por otra parte, desde el punto de vista de la convergencia uniforme, se aprecia que las oscilaciones no disminuyen al aumentar N . Aunque las curvas se ajustan cada vez mejor lejos del salto, los máximos y mínimos locales cercanos a la discontinuidad no se acercan al valor real de la función.

En particular, el primer máximo por encima de 1 mantiene aproximadamente la misma altura cuando N crece, mientras que las oscilaciones se concentran progresivamente en una región cada vez más estrecha alrededor del salto.



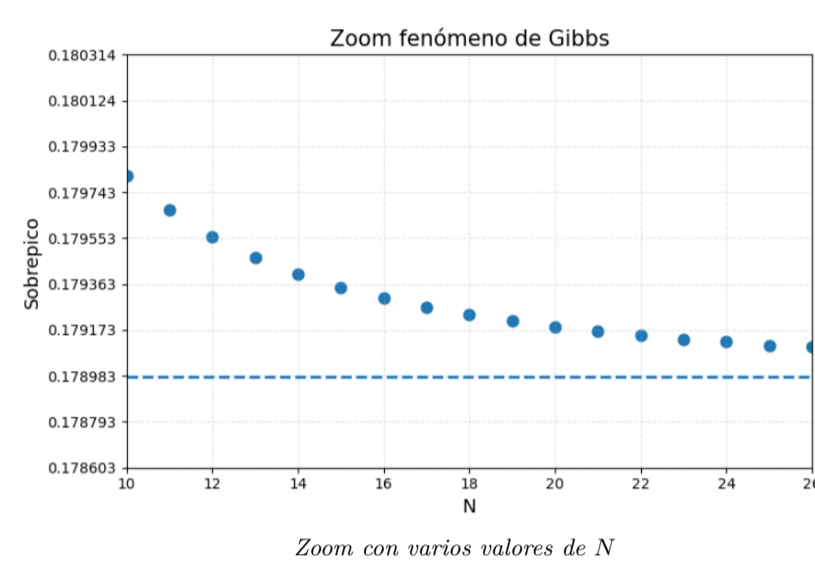
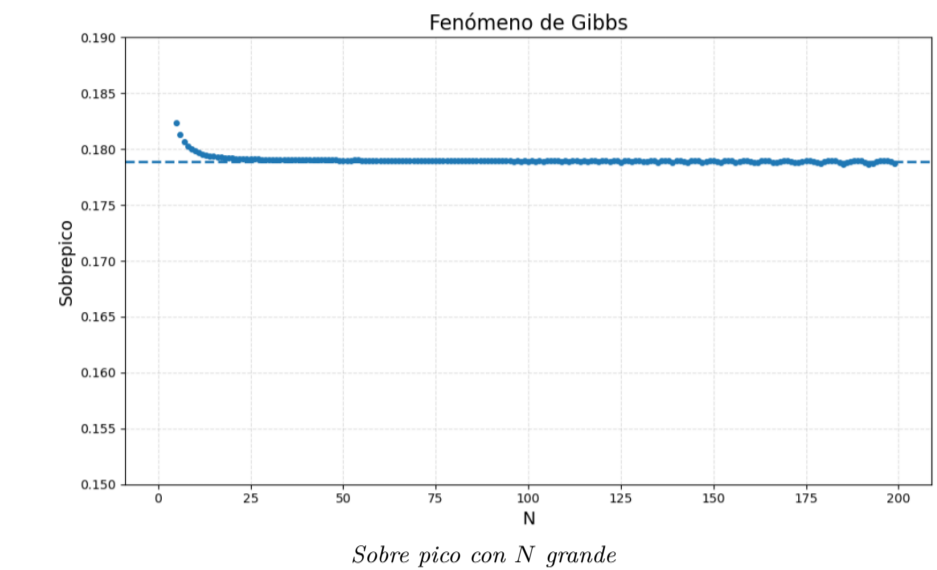
FENÓMENO DE GIBBS

Cerca del punto de discontinuidad, las sumas parciales de Fourier presentan una oscilación cuya amplitud no disminuye al aumentar N . Aunque la región donde se produce la oscilación se concentra progresivamente alrededor del salto, la altura máxima de la oscilación cerca del salto se mantiene prácticamente constante.

Para medir esta oscilación definimos una cantidad que cuantifica cuánto se sobrepasa la suma parcial respecto al valor lateral de la función. Esta cantidad recibe el nombre de sobre pico. Gráficamente es la recta vertical desde el punto más alto de la oscilación hasta la función original (visto en las gráficas de las sumas parciales). Sea x_0 un punto de discontinuidad. Definimos

$$G_N = \max_{|x-x_0|<\delta} S_N(x) - f(x_0^-). \text{ en nuestro caso, } G_N = \max_{|x-x_0|<\delta} |S_N(x)| - 1.$$

La referencia al valor lateral (y no ha $f(x_0)$) se debe a que en los puntos de discontinuidad la serie de Fourier converge al valor medio de los límites laterales. Al tratarse de una función a trozos con un salto en x_0 , el sobre pico puede definirse tanto respecto al valor lateral izquierdo como al derecho.



Sobre pico con N grande

Zoom con varios valores de N

Interpretación de las gráficas

→ La sucesión G_N se estabiliza a partir de cierto N y converge numéricamente hacia un valor constante.

→ No existe reducción de amplitud: aunque las oscilaciones se concentran cada vez más cerca del salto, su altura no disminuye.

→ En particular,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N \approx 0.17898 \neq 0.$$

→ La persistencia de este valor límite caracteriza el fenómeno de Gibbs.

Como G_N no tiende a cero cuando N aumenta, existe siempre una desviación máxima cerca del salto. En consecuencia,

$$\sup_x |S_N(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

y no existe convergencia uniforme.

SUMAS DE CESÀRO

El promedio de Cesàro de orden N se define como

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(x), \quad S_0 = 0.$$

donde $S_k(x)$ denota la suma parcial de orden k de la serie de Fourier.

Mientras que la suma parcial $S_N(x)$ introduce un truncamiento brusco de la serie, el promedio de Cesàro suaviza la aproximación al considerar la media de las primeras N aproximaciones parciales.

Este procedimiento actúa como un mecanismo de regularización que atenúa las oscilaciones generadas cerca de la discontinuidad.

Al comparar $\sigma_N(x)$ con $S_N(x)$ se aprecia que:

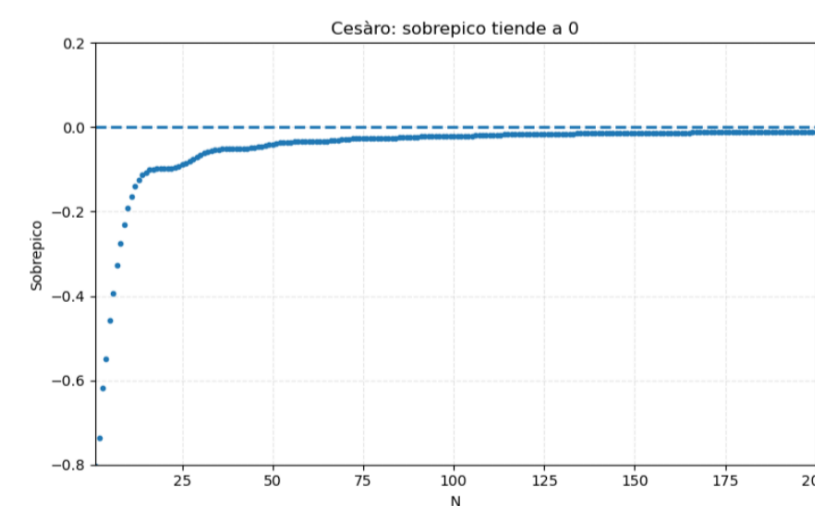
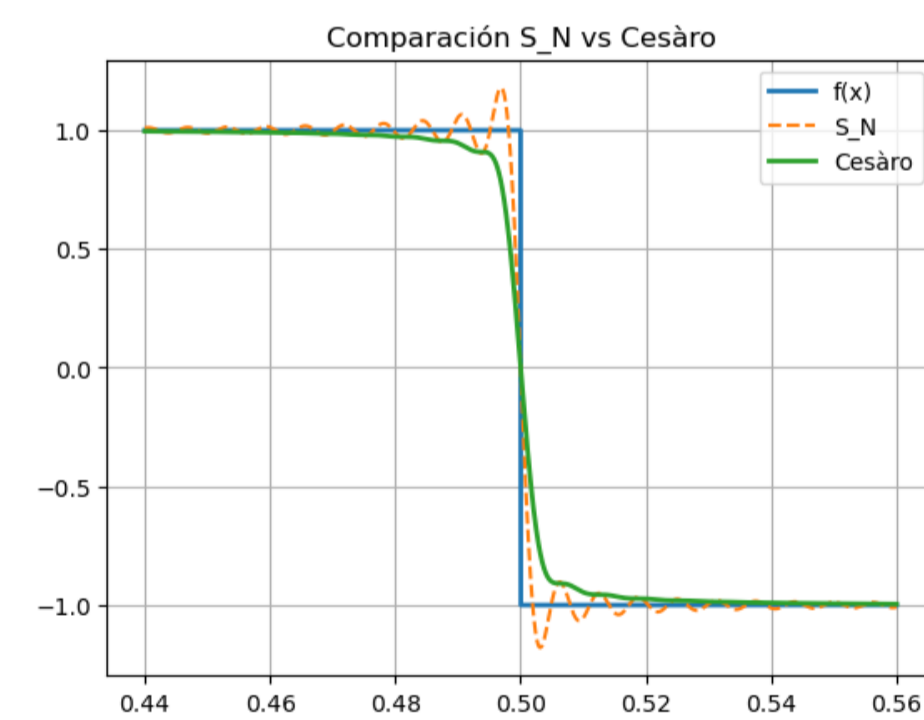
→ El sobre pico característico del fenómeno de Gibbs se reduce progresivamente al aumentar N

→ Las oscilaciones próximas al salto se reducen de forma notable.

→ La aproximación presenta un comportamiento más estable en el entorno de la discontinuidad.

En particular, aunque ambas aproximaciones convergen puntualmente fuera del salto, la versión promediada muestra una mejora significativa en la región crítica.

Aplicando la misma definición de sobre pico al promedio de Cesàro, se observa que su valor decrece con N y tiende a cero. Esto muestra que la regularización introducida por el promedio elimina la persistencia del fenómeno de Gibbs.



ESTABILIZACIÓN DEL SOBRE PICO

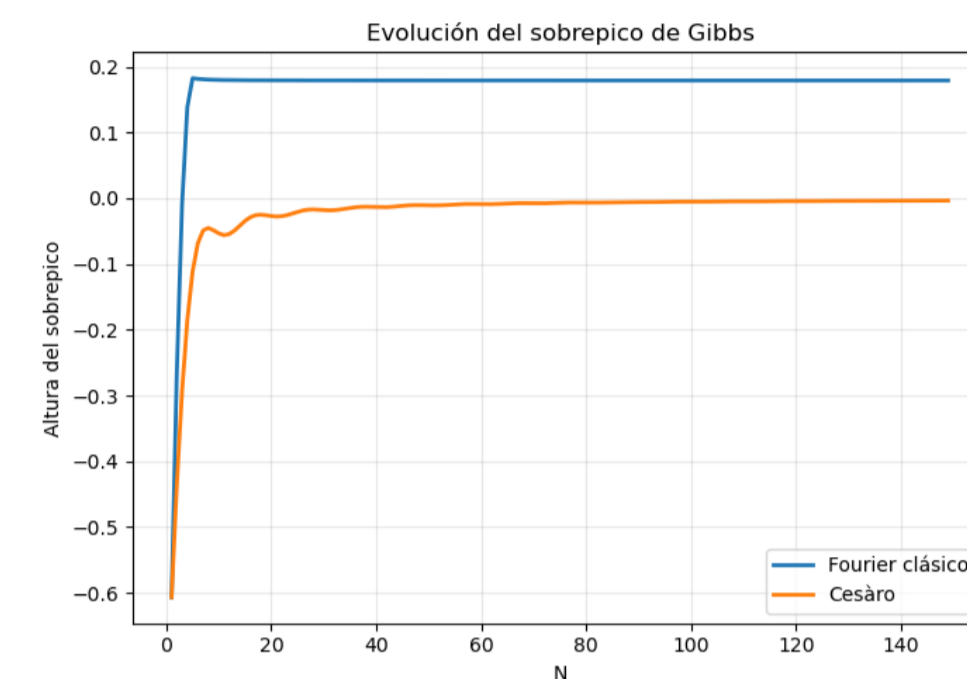
Representamos la altura del sobre pico G_N en función del número de términos N .

Numéricamente se observa que:

→ En la aproximación clásica, el sobre pico se estabiliza en un valor positivo distinto de cero, lo que confirma la persistencia del fenómeno de Gibbs.

→ En el promedio de Cesàro, el sobre pico disminuye progresivamente al aumentar N .

Este comportamiento muestra que, mientras la serie clásica no converge uniformemente en presencia de discontinuidades, el promedio de Cesàro reduce significativamente las oscilaciones en la región del salto.



COMPARACIÓN CUANTITATIVA

Para comparar ambas aproximaciones introducimos el error máximo fuera de una pequeña vecindad de las discontinuidades.

Sea $\varepsilon > 0$ y sean los puntos de discontinuidad $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Definimos

$$E_N(\varepsilon) = \max_{|x-x_j| \geq \varepsilon} |S_N(x) - f(x)|, \quad F_N(\varepsilon) = \max_{|x-x_j| \geq \varepsilon} |\sigma_N(x) - f(x)|,$$

donde $x_j \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

Estas cantidades miden el error uniforme excluyendo una pequeña región alrededor del salto.

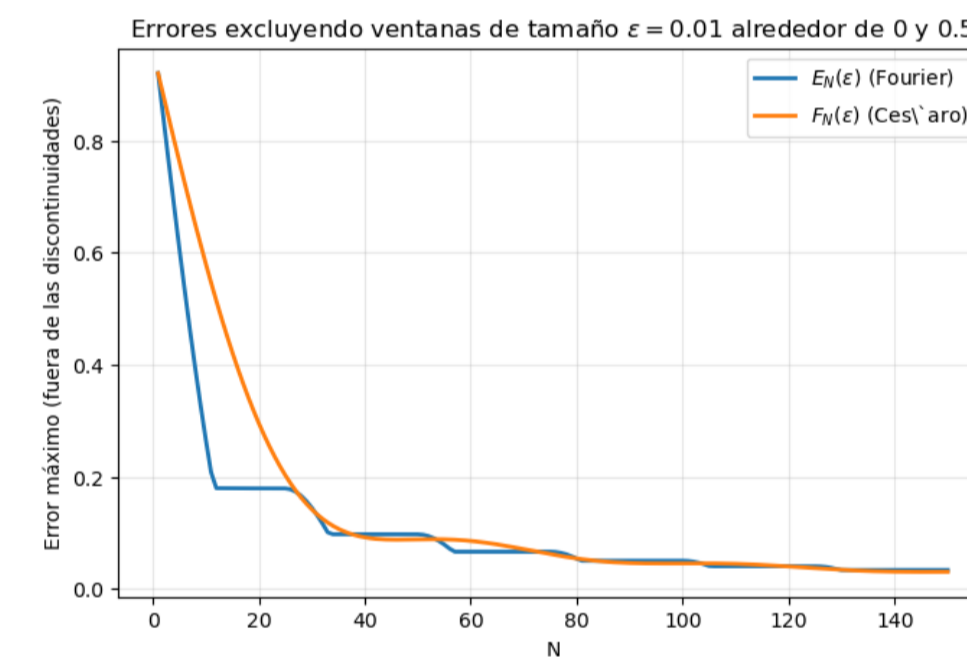
Numéricamente se observa que:

→ Ambos errores disminuyen al aumentar N .

→ La aproximación clásica presenta pequeñas oscilaciones en el descenso del error.

→ El promedio de Cesàro muestra un comportamiento más regular y estable.

Este análisis confirma que, fuera de las discontinuidades, ambas aproximaciones convergen uniformemente, mientras que las diferencias se concentran en la región crítica del salto.



CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos analizado la aproximación de una función discontinua mediante su serie de Fourier y hemos estudiado detalladamente el fenómeno de Gibbs. Los resultados numéricos confirman que:

→ Las sumas parciales clásicas convergen puntualmente en los puntos de continuidad y convergen al valor medio en los puntos de salto.

→ Sin embargo, no existe convergencia uniforme, ya que el sobre pico asociado al fenómeno de Gibbs persiste y se estabiliza en un valor positivo cuando $N \rightarrow \infty$.

→ El promedio de Cesàro (sumas de Fejér) introduce un efecto de suavizado que reduce significativamente las oscilaciones cerca de la discontinuidad.

→ Numéricamente se observa que el sobre pico disminuye progresivamente bajo el promedio de Cesàro, mejorando la estabilidad de la aproximación en la región crítica del salto.

En conclusión, aunque la serie de Fourier clásica describe correctamente el comportamiento global de la función, el promedio de Cesàro proporciona una aproximación más regular y visualmente más estable en presencia de discontinuidades.