# Análisis de la ecuación de Black-Scholes mediante su reducción a la ecuación del calor

Sergio Alejandro Maccanin, Ángela Marquet, Luis Agustín Zulueta

## Introducción

En este trabajo vamos a estudiar la **ecuación de Black-Scholes**, una ecuación muy importante dentro de las matemáticas aplicadas a las finanzas. Dicha ecuación es la siguiente:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \tag{1}$$

Esta utiliza las opciones europeas, que se basan en que un proveedor vende al comprador la opción de comprar su producto en un tiempo $T$ y a un precio fijado $E$. Además la misma opción de compra podra ser transferida por dinero, denotamos a este precio como $S$.
En la ecuación, $V_t$ representa el valor de la opción en función del precio del activo $S$ y del tiempo $t$. El parámetro $\sigma$ (volatilidad del activo) mide la variación de $S$, a modo de ejemplo las acciones de Coca-cola es un caso de volatilidad prácticamente nula, mientras que Dogecoin (criptomoneda de cuestionable fiabilidad) sería un ejemplo de lo contrario. Por último, $r$ representa el tipo de interés.

Veamoslo con un ejemplo. Supongamos que tú eres agricultor y necesitas dinero para llevar a cabo tu plantación de tulipanes, que cuando crezcan podrán de ser de tres tipos, amarillos (1€), negros (9€) y bicolores (13€). Entonces para poder financiarlo decides vender a un empresario la oportunidad de comprar en 5 meses ($T$) los tulipanes cada uno a un precio fijo de 5€ ($E$), luego lo que busca medir nuestra ecuación es el precio de la opción de compra, en el que el vendedor quiera maximizar el precio de venta y el comprador quiere ver si es rentable comprar la opcióna a ese precio.

## Objetivo

Aunque a primera vista la ecuación de Black-Scholes (1) puede parecer bastante complicada, lo interesante es que, mediante un cambio adecuado de variables, se puede transformar en una ecuación del calor.
El objetivo de este trabajo es no solo entender el origen del problema, es decir, las condiciones iniciales y de contorno que lo acompañan, sino también analizar dicho cambio de variables para ver cómo esta transformación permite simplificar el problema.

## El problema de Black-Scholes

Bajo las siguientes condiciones, la ecuación de Black-Scholes modela la evolución del precio de la opción sin arbitraje.

- **Pagos finales (condición inicial)**

$$C(S,T) = (S-E)^+ \qquad \text{(call: compra)}$$
$$P(S,T) = (E-S)^+ \qquad \text{(put: venta)}$$

- **Condiciones de contorno**
  *Compra:* $C(0,t)=0$, $C(S,t)-(S-e^{-r(T-t)}E)\to 0$ si $S\to\infty$
  *Venta:* $P(0,t)=Ee^{-r(T-t)}$, $P(S,t)=0$ $(S\to\infty)$

Las ecuaciones de los pagos finales dan las ganancias máximas en el tiempo T.
Las condiciones de contorno describen el comportamiento de la opción en situaciones extremas. Si $S=0$, el activo no tiene valor. Entonces la opción de compra no tiene valor, $C(0,t)=0$. Y en una opción de venta, el beneficio final es $E$ en el instante $T$, por lo que su valor en un tiempo anterior $t$ viene dado por el valor actual de esa cantidad, $l = E\cdot\{\text{reducción de su valor debido a la inflación}\}$.
Cuando $S\to\infty$, el precio del activo es muy grande. Entonces para una opción de compra, conviene ejercerla, por lo que su valor se aproxima a $S-l$. Para una opción de venta, no tiene sentido ejercerla, ya poseemos diniero infinito, por lo que su valor tiende a 0.

## Transformación en una ecuación del calor

### Paso 1: Cambio de Variables y Nuevo Problema

#### Cambio de Variables

Nuestro primer paso es convertir la ecuación de Black-Scholes en una más simple, lo hacemos mediante un cambio de variable introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$x = \log\frac{S}{E}, \quad \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}, \tag{2}$$
$$u(x,\tau) = \frac{V}{E}\exp\left(x\frac{k-1}{2} - k\tau\right), \tag{3}$$

donde $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ es un parámetro que relaciona la tasa libre de riesgo con la volatilidad.

#### Derivadas Transformadas

Mediante la regla de la cadena, las derivadas se transforman de manera natural:

$$V_t = -\frac{\sigma^2 E}{2}u_\tau, \quad V_S = \frac{u}{S}, \tag{4}$$
$$V_{SS} = \frac{u_{xx}-u}{S^2}. \tag{5}$$

De esta manera, eliminamos los coeficientes con dimensión que teníamos en nuestro problema original.

#### Ecuación para $u$

Si sustituimos las expresiones obtenidas en nuestra ecuación de Black-Scholes y simplificamos, llegamos a la expresión:

$$u_\tau = u_{xx} + (k-1)u_x - ku, \quad -\infty < x < \infty,\ 0 < \tau < T. \tag{6}$$

Ahora, hemos llegado a una ecuación mucho más sencilla de manejar.

#### Condición Inicial (Call y Put Option)

Obtenemos ahora las condiciones iniciales para $u$, por un lado la que corresponde a la **venta**:

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{k-1}{2}x\right) - \exp\left(\frac{k+1}{2}x\right) & x < 0, \\ 0 & x \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Y, para la opción **compra**, la condición inicial resulta de la forma:

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0 & x > 0, \\ \exp\left(\frac{k+1}{2}x\right) - \exp\left(\frac{k-1}{2}x\right) & x \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

#### Solución Única (venta)

Como hemos visto en clase, las condiciones de contorno nos permiten obtener la solución única usando la ecuación de calor. Esta es de la forma:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}\,dy. \tag{9}$$

### Paso 2: Reducción Final a Black-Scholes

Haciendo otro cambio de variable, $y = \sqrt{2\tau}z + x$ en la integral de $u(x,\tau)$ (call), llegamos a:

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_+) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_-), \tag{10}$$

donde $N$ es la normal estándar y $d_\pm = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} \pm \frac{k\pm 1}{2}\sqrt{2\tau}$.
Deshaciendo el cambio de variable inicial, para volver a las variables originales:

$$C(S,t) = SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)}N(d_-), \quad d_+ = \frac{\log(S/E) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{11}$$

De esa forma, hemos terminado la deducción que conecta nuestra ecuación de Black-Scholes con la de calor que conocemos.

### Paso 3: Ecuación de Calor Pura (Último Paso)

Por último, eliminamos términos lineales de $u_\tau = u_{xx} + (k-1)u_x - ku$, para ello hacemos:

$$v(x,\tau) = u(x,\tau)\exp\left(\frac{1-k}{2}x + \left[\frac{(k-1)^2}{4} - k\right]\tau\right).$$

Entonces $v$ satisface el problema completo de calor:

$$v_\tau = v_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 < \tau < T, \tag{12}$$
$$v(x,0) = h(x) = g(x)e^{\frac{1-k}{2}x}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

con $v\to 0$ cuando $|x|\to\infty$.
**Solución única:** Finalmente, hemos obtenido la solución única de nuestra ecuación de calor:

$$v(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} h(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}\,dy.$$

## Conclusión

Hemos conseguido llegar del modelo económico de la ecuación de Black-Scholes hasta un modelo de EDP de la ecuación de calor. Donde el PVI se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{cases} v_\tau = v_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < \tau < T, \\ v(x,0) = h(x), & v\to 0\ (|x|\to\infty), \end{cases}$$

que admite **solución única y existencia** por la teoría de EDP vista en clase.
**Significado financiero:** La ecuación de calor modela la difusión log-normal del precio bajo incertidumbre. El tiempo financiero fluye hacia atrás hasta vencimiento, y la fórmula Black-Scholes emerge como expectativa martingala del proceso difusivo.

## Bibliografía


1. Salsa, S., Verzini, G. (2022). Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory (4th ed.). Springer.
2. How a Random Flower Became the Bitcoin of the 1600s: From Weird history https://www.youtube.com/watch?v=JDJ-a$_hPFEI$


UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID