Análisis de la solución fundamental y convolución en la ecuación del calor

Carlos Asensio y Javier Martínez

Universidad Politécnica de Madrid

Motivación

El objetivo de este proyecto es entender y visualizar diferentes soluciones de la ecuación del calor a partir de la solución fundamental. Además, veremos como se utiliza la solución fundamental para construir otras soluciones más complejas a través de la convolución y el principio de superposición.

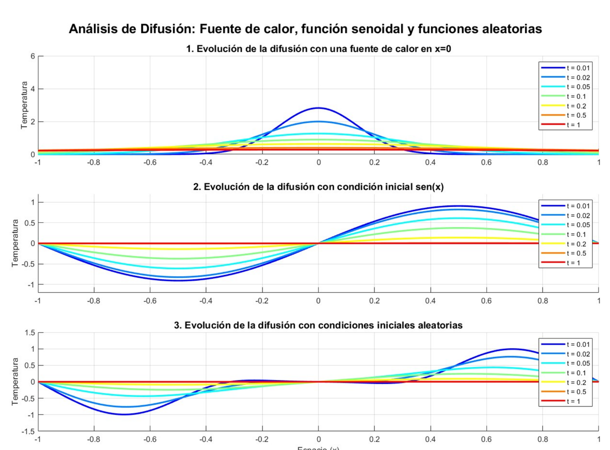
Solución fundamental en dimensión 1

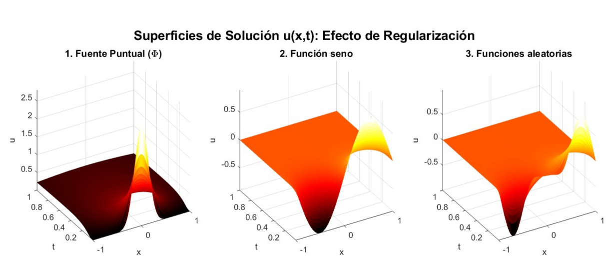
Se ha implementado la solución fundamental para resolver la ecuación del calor en 1 dimensión. La solución fundamental se define como la solución a la ecuación $\Phi_t - D\Delta\Phi = 0$ que satisface la condición inicial dada por la Delta de Dirac $\Phi(x,0) = \delta(x)$ y viene dada por:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad t > 0$$

.

Tomamos como dominio el intervalo $[-1,1]$, y el intervalo de tiempo $[10{-}2, 1]$. Se evita $t = 0$, donde no está definida la solución, pero estudiamos a partir de un instante después hasta $t = 1$. Tomaremos tres condiciones iniciales. Estas serán un único punto caliente en el centro del dominio, una condición inicial dada por la función seno y finalmente unas condiciones iniciales usando funciones aleatorias (relacionado con nuestro anterior trabajo).





En el caso del único punto caliente su solución es justamente la solución fundamental. Los otros dos casos no se pueden deducir inmediatamente con la solución fundamental, sino que es necesario aplicar la solución por convolución.

Problema 11b

Encontrar las soluciones de $u_t - u_{xx} = 0$ en $x > 0, t > 0$ que satisfacen las condiciones

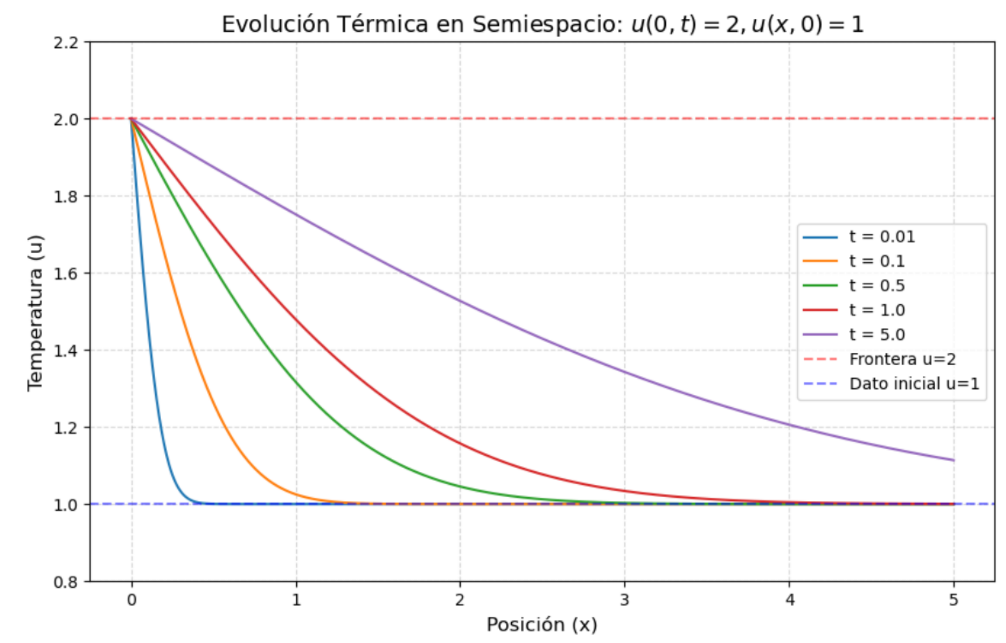
$$\begin{cases} u(0,t) = 2 \\ u(x,t) \to 1 \text{ si } x \to \infty, x > 0 \\ u(x,0) = 1, x > 0 \end{cases}$$

Resolviendo por autosemejantes, con el cambio de variable $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, donde $u(x,t) = U(\xi)$, resulta la ecuación $U''(\xi) + \frac{\xi}{2}U'(\xi) = 0$. Por separación de variables obtenemos la solución $U(\xi) = A\int_0^{\xi} e^{-4s^2} ds + B$. Aplicando las condiciones de contorno y realizando el cambio $r = \frac{s}{2}$ en la integral, obtenemos::

$$u(x,t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{s^2}{4}} ds = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-r^2} dr = u(x,t) = -\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2.$$

Tomando el dominio $\Omega = (0,\infty) \times (0,T]$ y teniendo en cuenta que $0 \le \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) \le 1$, entonces la solución está acotada: $1 \le u(x,t) \le 2$, cuyo valor máximo se alcanza en la frontera, $u(0,t) = 2$. Por tanto se cumple el Principio del Máximo

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_p} u(x,t).$$

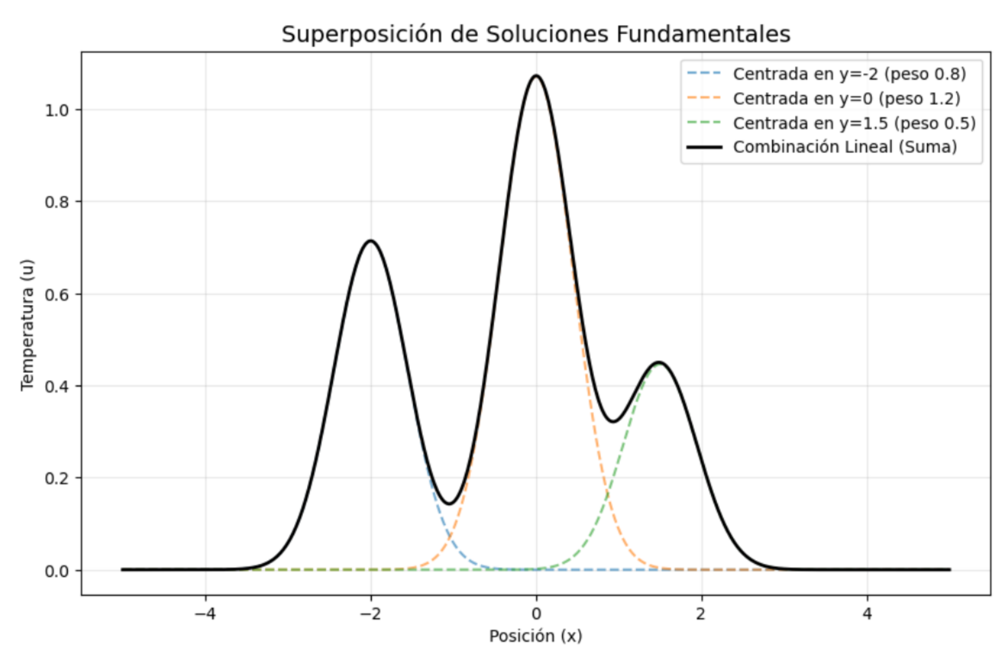


Traslación de la solución en el espacio

Si tenemos una solución que cumple $u_t - u_{xx} = 0$ y tomamos una distancia fija y, entonces $v(x,t) = u(x-y,t)$ también es solución. Esto se debe a que ni las derivadas espaciales ni las temporales se ven afectadas por el cambio $x - y$. Utilizando que la ecuación es lineal y aplicando el Principio de Superposición, resulta que si tenemos varias soluciones fundamentales desplazadas en diferentes puntos $(y_1, ..., y_n)$, cualquier combinación lineal de estas será también solución de la ecuación, es decir,

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u(x - y_i, t)$$

es también solución del sistema, con $c_i \in \mathbb{R}$.



Solución por convolución

La solución fundamental nos permite resolver la ecuación del calor para un caso en concreto. Sin embargo, ¿cómo se puede extrapolar esto para condiciones iniciales diferentes? Aquí toma relevancia la solución por convolución, la cual para una condición inicial $u_0(x) = g(x)$ permite solucionar la ecuación del calor.

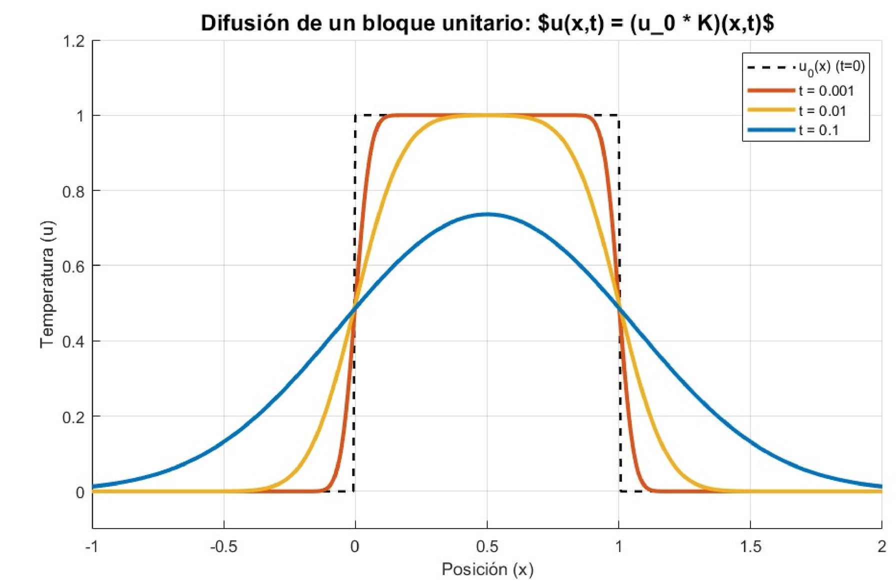
$$u(x,t) = (g * \Phi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy$$

En este apartado se usará la solución por convolución para calcular la solución a la ecuación del calor dada por las condiciones iniciales $u_0(x) = 1_{[0,1]}$.

$$u(x,t) = (g\phi)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(xy,t) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y,t) 1_{[0,1]}\, dy$$

$$= \int_0^1 \phi(x-y,t) dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy$$

Usamos la fórmula del trapecio para la aproximación de la integral en $t = 0.1, t = 0.01, t = 0.001$, y representamos los resultados.



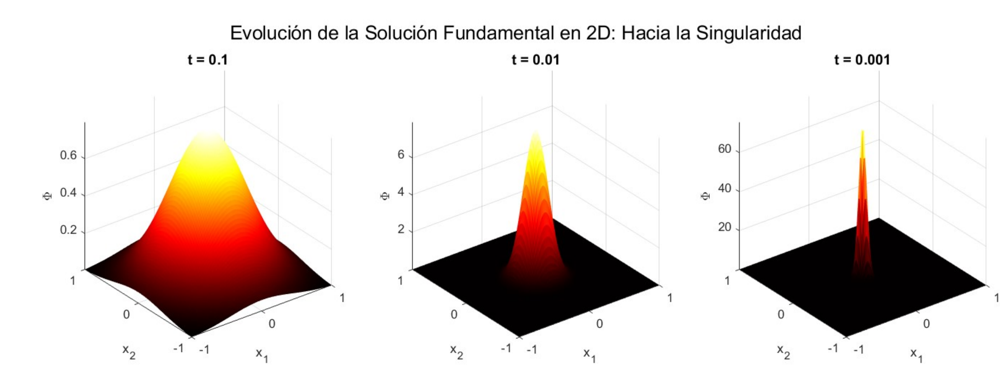
Se puede apreciar cómo esa distribución inicial de temperatura 1 en el intervalo $[0,1]$ se va expandiendo y suavizando en la recta real. Finalmente la temperatura acabaría siendo 0 en toda la recta, pues el calor se disipa en todos los tramos.

Solución fundamental en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

La expresión de la solución fundamental en $\mathbb{R}^n$ es :

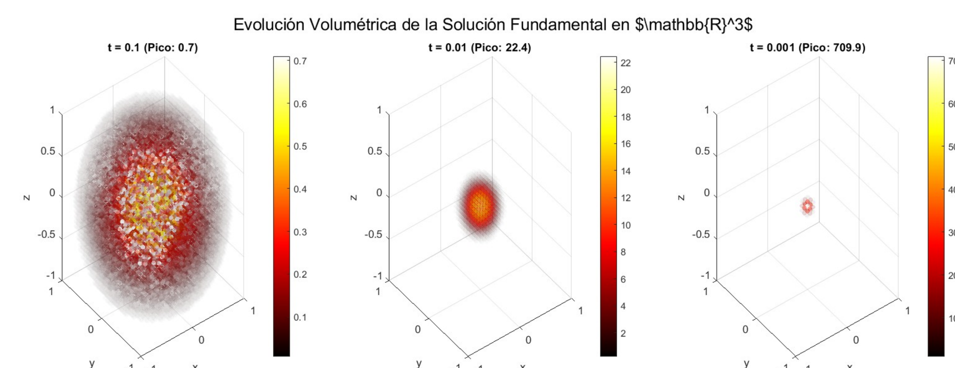
$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$$

En estos casos la solución fundamental vendría a representar la solución de la ecuación del calor en los casos particulares dónde las condiciones iniciales son un punto caliente en el plano ($\mathbb{R}^2$) y un punto caliente en el espacio ($\mathbb{R}^3$).



Se puede ver que cuanto más pasa el tiempo, mas se suaviza la temperatura. La temperatura se disipa de forma radial (en la solución fundamental aparece la norma) desde el origen. De esta forma, a medida que aumenta t la temperatura disminuye en el origen y la gráfica se suaviza en el resto de puntos, hasta que cuando $t \to \infty$ la temperatura se iguala en todo en $\mathbb{R}^2$.

Por otro lado, a medida que $t \to 0$, la temperatura en el origen aumenta mientras que en el resto de puntos la temperatura tiende a 0. Concluimos que la distribución de temperatura converge a la Delta de Dirac en $\mathbb{R}^2$, lo cual es evidente pues es la condición inicial de la solución fundamental. Este mismo comportamiento se puede apreciar para $\mathbb{R}^3$.



Conclusión

Hemos comprobado que la solución fundamental resuelve el caso de una fuente puntual y constituye una base para resolver condiciones iniciales arbitrarias (convolución) y plantear sistemas más complejos (superposición).