

Motivación

En este trabajo estudiaremos la ecuación del calor en diferentes condiciones. Analizaremos el principio del máximo, la velocidad de propagación de las soluciones y su decaimiento temporal de una forma más visual. Finalmente compararemos el comportamiento de los casos estudiados

La ecuación del calor en \mathbb{R} y su representación por convolución

Comenzaremos el trabajo definiendo los elementos necesarios para realizar el análisis cualitativo posterior.

Se define como la ecuación del calor en \mathbb{R} a:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

Para representar explícitamente la solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor, introducimos primero su solución fundamental, también conocida como núcleo del calor, que será la herramienta básica en el caso no acotado:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \quad (2)$$

De su expresión explícita se deduce que $\Phi(x, t) \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t) dx = 1, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Para tratar el caso no acotado, al no tener un dominio, necesitaremos un método que nos permita aproximar la solución de la ecuación. Utilizaremos el método de convolución que aproxima respecto al dato inicial con la solución fundamental (2).

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy. \quad (3)$$

La fórmula de convolución muestra que $u(x, t)$ se obtiene combinando todos los valores de $u_0(y)$, donde los puntos más cercanos a x tienen mayor peso. Se podría decir que el valor de $u(x, t)$ es una media ponderada del dato inicial.

La convolución describe cómo la temperatura inicial se redistribuye a lo largo del tiempo. Además, para todo $t > 0$ la función $\Phi(\cdot, t)$ es suave (C^∞), debido a esto la convolución regulariza la solución de inmediato. Esto nos deja ver que, aunque el dato inicial u_0 sea poco regular o discontinuo, la solución obtenida por convolución seguirá siendo suave para todo $t > 0$.

A continuación, dividiremos el trabajo en el caso acotado y el caso no acotado, dentro de los cuales estudiaremos el principio del máximo, la velocidad de propagación y el decaimiento en el tiempo.

Caso no acotado

En esta sección se analizará la solución de la ecuación del calor en la recta real \mathbb{R} . Para ello, utilizaremos el siguiente problema.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x). \end{cases} \quad (4)$$

Si aplicamos la fórmula de convolución para calcular la solución del problema obtenemos que:

$$u(x, t) = \int_{-1}^1 \Phi(x - y, t) dy.$$

En la siguiente gráfica se puede observar la aproximación de la solución del problema en el intervalo $[-6, 6]$.

Principio del máximo

En la Figura 1 podemos ver el principio del máximo ilustrado para el primer problema (4). Podemos observar que, a pesar de que la condición inicial es discontinua, la solución se suaviza para todo $t > 0$ y permanece acotada entre 0 y 1, sin exceder esos extremos. Esto concuerda con el principio del máximo. Además, cabe resaltar que deja de ser nula fuera del intervalo $[-1, 1]$; más adelante explicaremos qué indica este hecho.

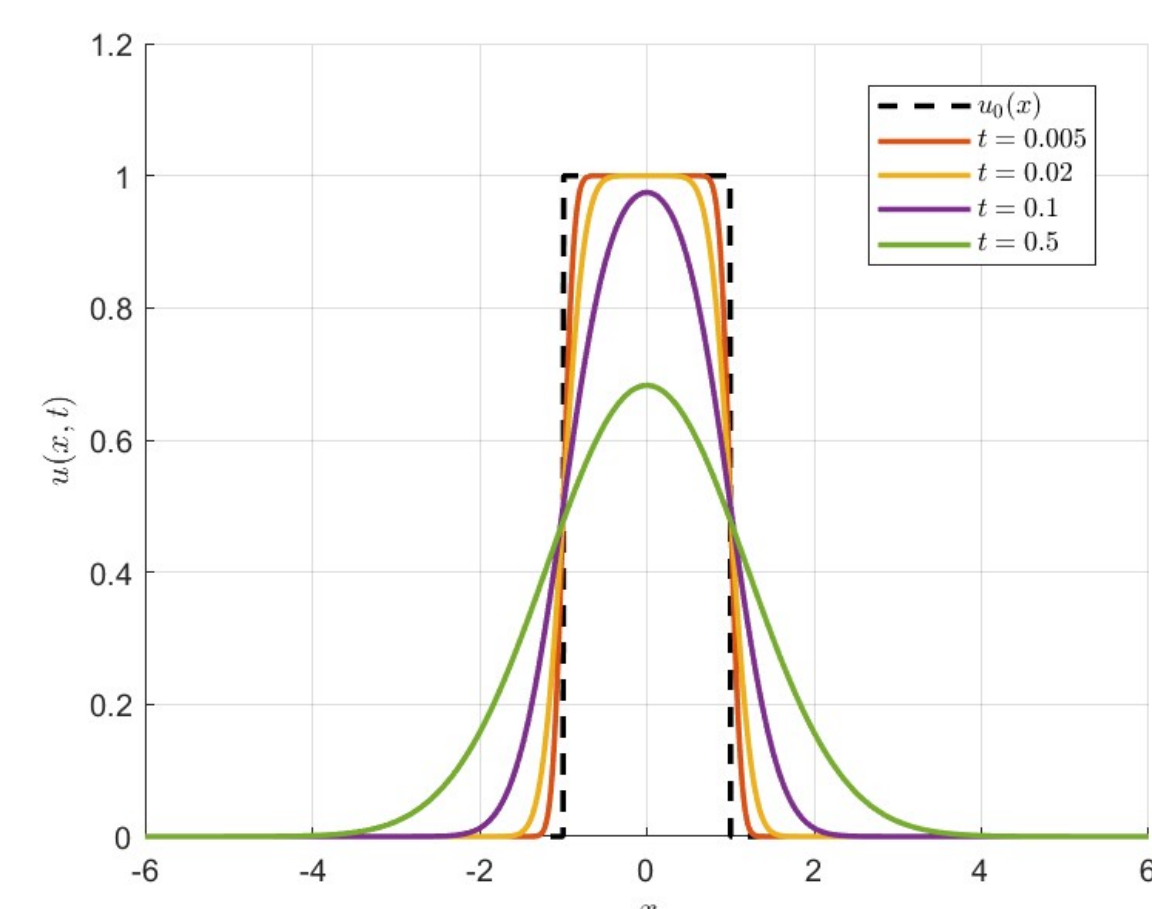


Figure 1. Aproximación por convolución del problema 1.

Velocidad de propagación

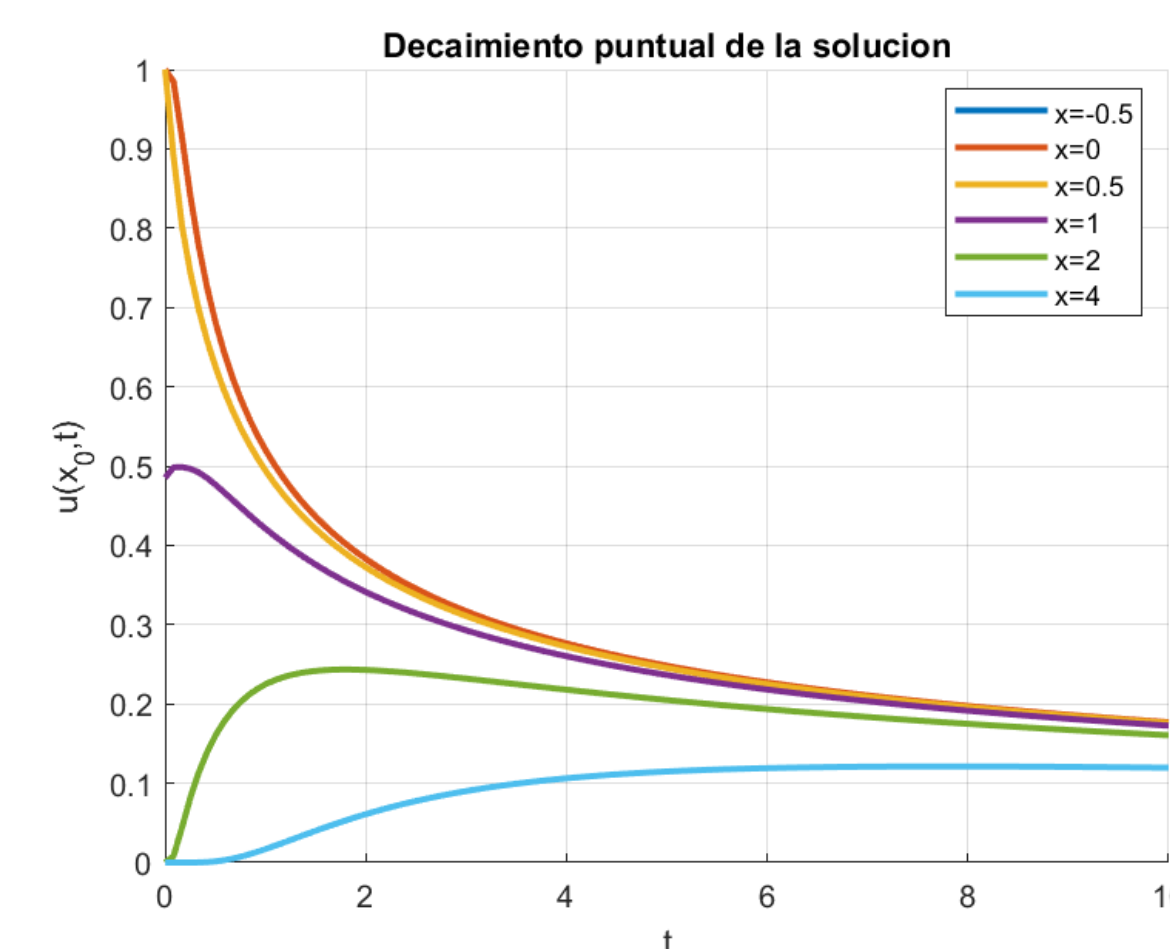
A diferencia de la ecuación de ondas, en la ecuación del calor la velocidad de propagación no es finita. Usemos como referencia el problema 1 (4), con solución:

$$u(x, t) = \int_{-1}^1 \Phi(x - y, t) dy. \quad (5)$$

Procederemos por contradicción. Supongamos que la ecuación del calor tiene velocidad finita de propagación. Esto quiere decir que para cada punto x fuera del intervalo inicial $[-1, 1]$, existe un tiempo $t' > 0$ tal que $u(t, x) = 0$ para todo $t < t'$. Sin embargo, excluyendo el instante inicial, $\Phi > 0$ para todo $t > 0$. Como estás integrando una función estrictamente positiva en un intervalo de medida positiva, se tiene que cumplir que $u(t, x) > 0$ para todo $t > 0$, lo cual contradice la hipótesis de propagación finita. Concluimos que la ecuación del calor presenta velocidad infinita de propagación.

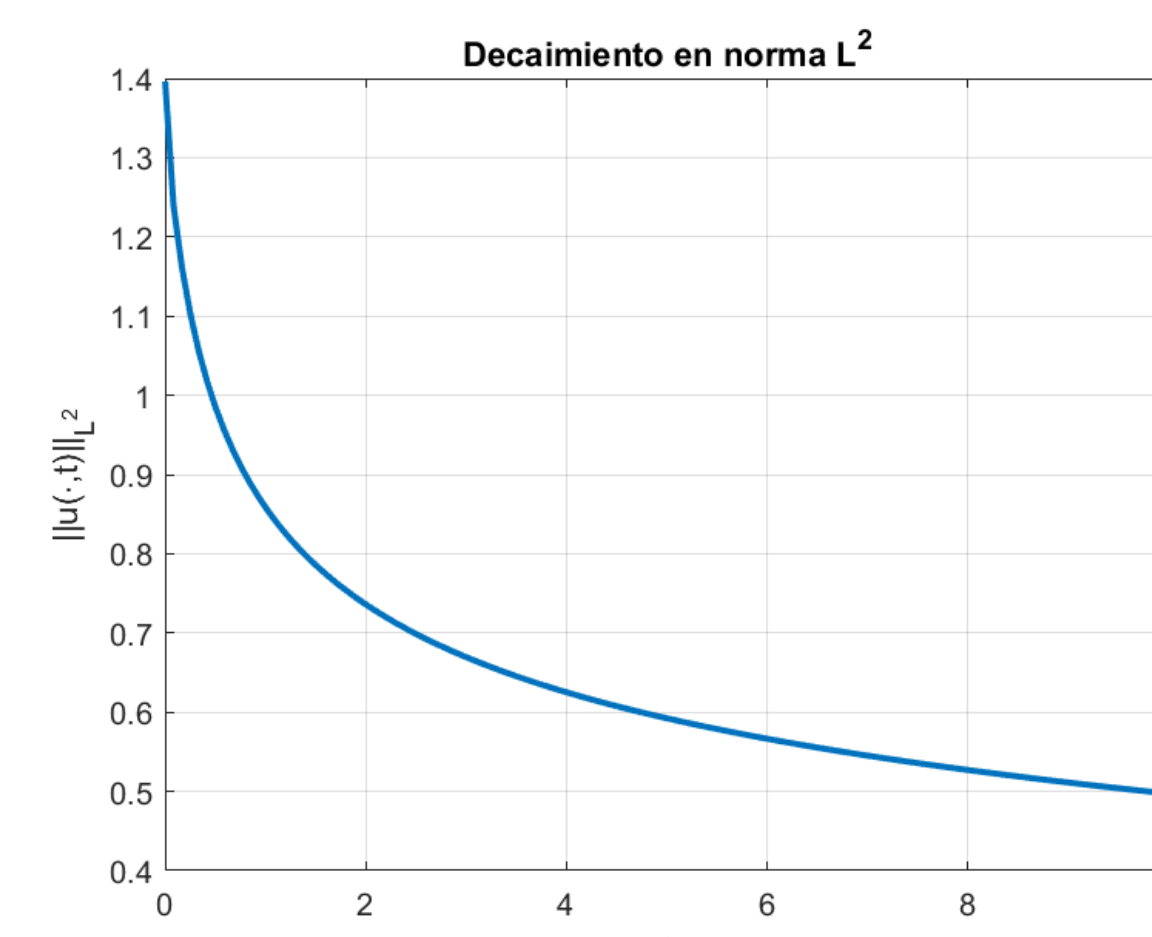
Decaimiento en tiempo

Para ilustrar el decaimiento de las soluciones del problema 1, se estudia tanto el comportamiento puntual en $u(x_0, t)$ para distintos puntos x_0 , como la evolución de la norma L^2 .



Los puntos que pertenecían al intervalo inicial empiezan con valores altos y experimentan un decaimiento monótono. El punto $x = 1$ al estar en la frontera experimenta un aumento repentino y disminuye rápidamente. Por otra parte, los puntos que están fuera del intervalo inicial primero aumentan hasta alcanzar un máximo y después disminuyen. Además, cuanto más alejado este el punto, el máximo es menor y se produce más tarde. Parece que los valores no tienden a 0. Esto es porque el intervalo escogido no es lo suficientemente grande. Si se amplía el intervalo el resultado coincide con el teórico.

Se observa cómo la curva decrece con el tiempo, esto coincide con el carácter difusivo de la ecuación del calor. Además, el carácter cuadrático de L^2 hace que cuando la temperatura está concentrada, el valor de L^2 es mayor. Por otro lado, cuanto más tiempo pasa, más lento decrece. Esto tiene sentido ya que al principio la temperatura está más concentrada, pero cuanto más tiempo pasa, la función es más suave y por tanto hay menos concentración que distribuir.



Caso acotado

En este apartado estudiaremos el principio del máximo aplicado a un problema con condiciones iniciales del tipo Dirichlet y otro de tipo Neumann.

Dirichlet

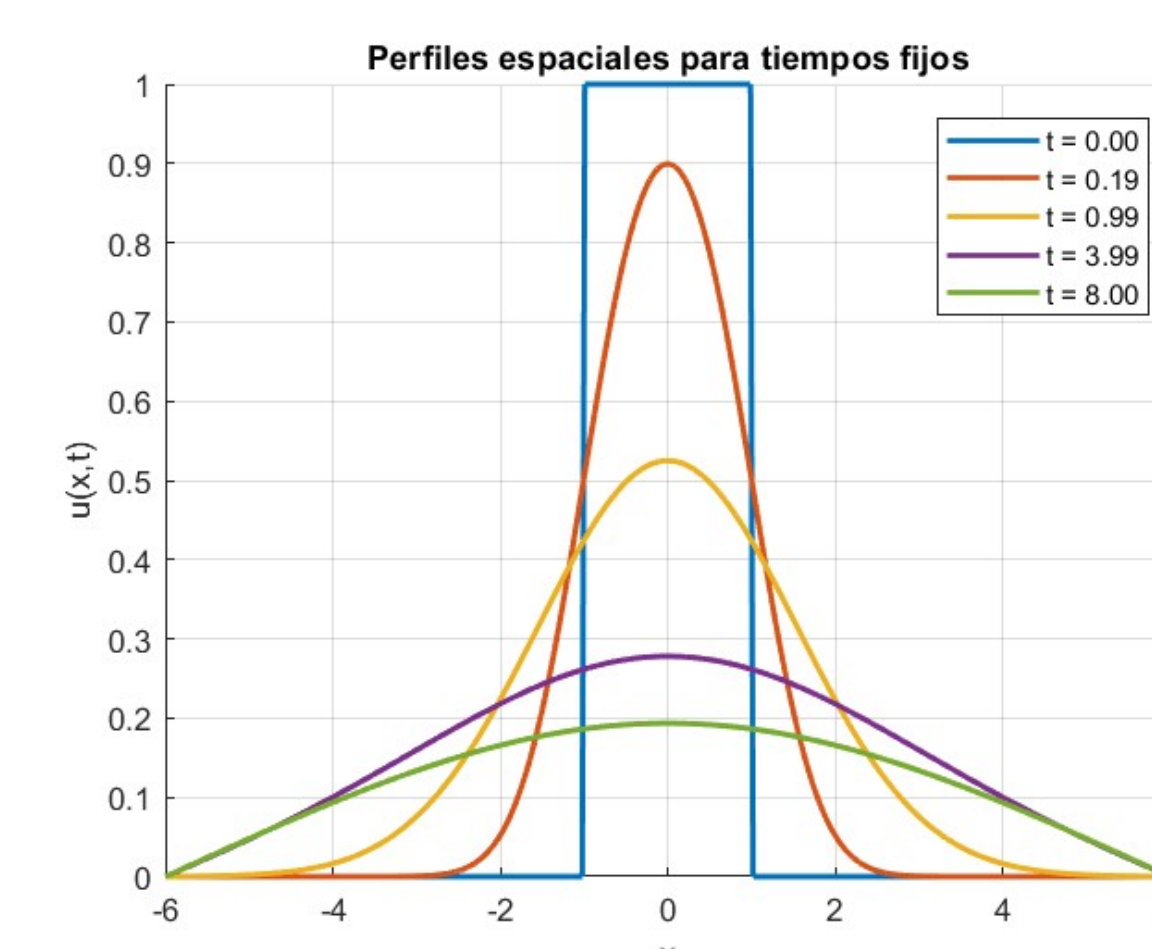
Sea nuestro problema de Dirichlet de la forma

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (-6, 6), t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(6, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), & x \in (-6, 6). \end{cases}$$

Principio del máximo

En la gráfica podemos observar un comportamiento muy similar al caso no acotado, sin embargo, es destacable como el calor se disipa a una mayor velocidad.

En las condiciones de frontera Dirichlet homogéneas no tiene por qué conservarse el calor, es decir, este se puede disipar por la frontera. Cosa que ocurre en nuestro caso y por ello el calor en todos los puntos tiende a cero.



Decaimiento

Por la razón mencionada en el anterior apartado, la disipación del calor a través de la frontera, todos los comportamientos de la solución tienden a cero, da igual la posición.

También podemos observar que hay un punto que recibe el calor más tarde, produciéndose un aumento de calor en ese punto. Sin embargo, estos aumentos disminuyen debido a la pérdida del mismo

Neumann

Sea nuestro problema con condiciones frontera de Neumann:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (-6, 6), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(6, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), & x \in (-6, 6). \end{cases}$$

Para poder aplicar el principio del máximo en los problemas del tipo Neumann, primero debemos obtener la solución del problema y obtener su máximo en la frontera

Principio del máximo

Una cualidad muy importante de los problemas del tipo Neumann homogéneos son que cuando $t \rightarrow \infty$ la solución tiende a la media integral de la condición inicial definida:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x, 0) dx$$

En nuestro caso la media integral es $\frac{1}{6}$. Esto se debe a no haber flujo de calor en los extremos no se produce ni pérdida ni ganancia de calor llegando a un estado de equilibrio.

Decaimiento

En esta gráfica confirmamos lo explicado en el apartado anterior, ya que observamos que la solución del problema tiende a la media integral de la condición inicial temporal.

También observamos el comportamiento, ya observado en los casos anteriores, donde hay puntos que reciben calor y luego lo pierden.

Conclusiones

- En el caso no acotado la solución se difunde por toda la recta; puntualmente tiende a 0, aunque el calor total no se pierde, sino que se reparte en un dominio infinito.
- En el caso Dirichlet homogéneo y acotado la solución tiende a cero por la pérdida de calor a través de la frontera.
- En el caso de Neumann homogéneo y acotado la solución tiende a la media integral, ya que el calor no disminuye ni aumenta a lo largo del experimento
- En todos los casos se ve el principio del máximo y el carácter suavizante de la ecuación del calor, pero el comportamiento asintótico depende completamente del tipo de dominio y, en el caso acotado, de las condiciones de contorno.

