COORDENADAS CILÍNDRICAS PARABÓLICAS

Autores: Miguel Montano Reynoso, Héctor Mota Sánchez, Guillermo Verdejo García y Paola Villares Jordán - GRUPO 01

CONCEPTOS GENERALES

RELACIÓN CON CARTESIANAS

Las coordenadas parabólicas cilíndricas (u, v, z), pasan a cartesianas mediante:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u^2-v^2}{2} \\ x_2 = uv \\ x_3 = z \end{cases} \quad \text{Con dominio:} \quad \begin{cases} 0 < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

LÍNEAS COORDENADAS EN CARTESIANAS

Sustituyendo la variable correspondiente por el parámetro tiempo se obtienen:

$$\gamma_u(t,v,z){:}(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{t^2-v^2}{2}, tv, z\right)$$

$$\gamma_v(u,t,z){:}\ (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{u^2-t^2}{2}, ut, z\right)$$

$$\gamma_z(u,v,t){:}\ (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{u^2-v^2}{2}, uv, t\right)$$

CAMPOS DE VELOCIDAD

Derivando cada línea coordenada respecto al tiempo obtenemos:

$$\gamma'_u = u\vec{i} + v\vec{j} \qquad \gamma'_v = -v\vec{i} + u\vec{j} \qquad \gamma'_v = \vec{k}$$

VECTORES UNITARIOS TANGENTES A LAS LÍNEAS

Son los campos de velocidad divididos por su norma

$$\overrightarrow{e_u} = \frac{\gamma'_u}{h_u} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\vec{i} + v\vec{j}) \qquad \overrightarrow{e_v} = \frac{\gamma'_v}{h_v} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(-v\vec{i} + u\vec{j}) \qquad \overrightarrow{e_z} = \frac{\gamma'_z}{h_z} = \vec{k}$$

MATRICES DE CAMBIO DE BASE

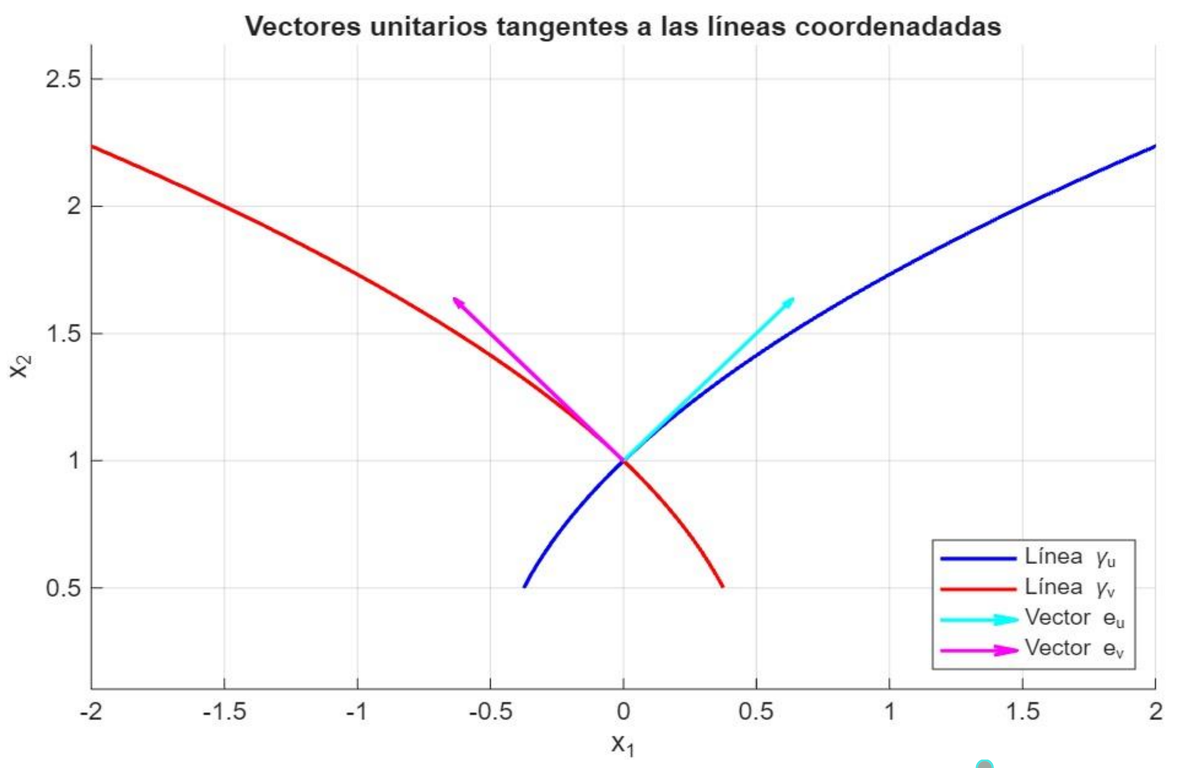
Las matrices de cambio de base Q y Q^{-1} nos permiten transformar las coordenadas de un vector de una base a otra.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CAMPO DE POSICIÓN

Aplicando Q^{-1} al vector (x_1, x_2, x_3) en la base cartesiana :

$$\vec{r}(u,v,z) = \frac{u^3+uv^2}{2\sqrt{u^2+v^2}}\overrightarrow{e_u} + \frac{u^2v+v^3}{2\sqrt{u^2+v^2}}\overrightarrow{e_v} + z\overrightarrow{e_z}$$



OPERADORES VECTORIALES

GRADIENTE

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{h_u}\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{h_v}\hat{\mathbf{e}}_v + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{h_z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla f(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_v$$

La expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas parabólicas nos permite hallar el gradiente de una función escalar apliicado a un punto.

DIVERGENCIA

$$\nabla\mathbf{r} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_z r_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_z r_v) + \frac{\partial}{\partial z}(h_u h_v r_z)\right]$$

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = \frac{1}{(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^3+uv^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^2v+v^3}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}((u^2+v^2)z)\right) = \boxed{3}$$

Para el caso del campo vectorial posición, su divergencia es igual a la dimensión del espacio vectorial.

ROTACIONAL

$$rot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_z}\begin{vmatrix} h_u\cdot\mathbf{e}_u & h_v\cdot\mathbf{e}_v & h_z\cdot\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u\cdot\vec{F}_u & h_v\cdot\vec{F}_v & h_z\cdot\vec{F}_z \end{vmatrix} \qquad rot(r) = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\mathbf{e}_u & \sqrt{u^2+v^2}\mathbf{e}_v & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}(u^3+uv^2) & \frac{1}{2}(v^3+u^2v) & z \end{vmatrix} = 0$$

Al ser un campo conservativo, el rotacional del campo posición es el vector nulo

BIBLIOGRAFÍA

- *Notas breves sobre curvas planas y superficies regladas*. [Moodle de la asignatura]
- *The LaTeX Companion. 2nd Edition*. Frank Mittelbach y Michel Goossens.
- *Tema 2: Campos tensoriales y operadores diferenciales*. [Apuntes de Moodle]
- https://academia-lab.com/enciclopedia/superficie-reglada/
- *Coordinates. Part 1*. Wolfram Neutsch, De Gruyter, pp. 1186–1187.
- Field Theory Handbook. 2nd Edition. P. Moon y D. E. Spencer, sección 8.2.

SUPERFICIES Y CURVATURA

EJEMPLOS DE SUPERFICIES Y SUPERFICIES REGLADAS

Una superficie de nivel se define, para un campo escalar f, aplicado en un punto genérico P(u,v,z) como:

$$S_c = \{\mathrm{P} \in 0 \subset \mathbb{R}^3 | f(\mathrm{P}) = c\}$$

Es decir, igualamos el campo escalar a una constante c, dando:

$$f_1(u,v,z) = u = c$$
$$f_2(u,v,z) = v = c$$
$$f_3(u,v,z) = z = c$$

La matriz de la cuádrica nos ayuda a clasificar la superficie. P.ej. para f1:

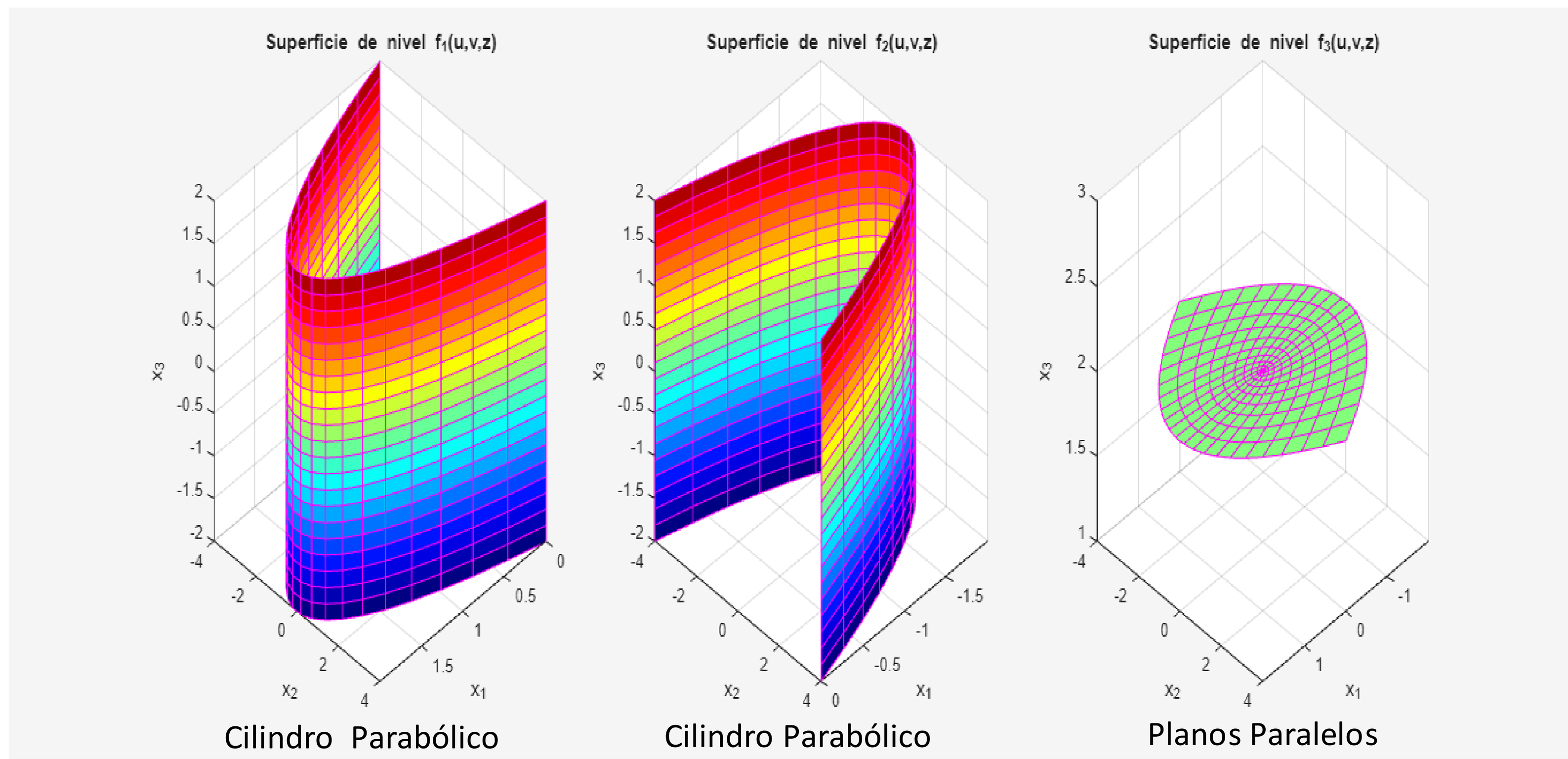
$$u = \sqrt{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} + x_1} = c \Rightarrow \boxed{x_2^2 + 2c^2x_1 - c^4 = 0} \qquad \mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & -c^4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(A^*) = 0 \quad \delta = \det(A) = 0 \quad \mathrm{rang}(A^*) = 3 \quad \mathrm{sign}(A) = (1,0)$$

Las superficies regladas son aquellas generadas por una recta móvil, que parametrizamos: $\varphi(u,v) = \gamma(v) + u\,\vec{w}(v)$

$$\varphi(z,v) = \gamma(v) + z(0,0,1) = \left(\tfrac{1}{2}(c^2-v^2),\ cv,\ z\right) \quad \varphi(z,u) = \gamma(u) + z(0,0,1) = \left(\tfrac{1}{2}(u^2-c^2),\ uc,\ z\right) \quad \varphi(u,v) = \left(\tfrac{1}{2}(u^2-v^2),\ uv,\ c\right)$$

Al haber podido expresarlas mediante la parametrización dada en la definición, son superficies regladas



Cilindro Parabólico — Cilindro Parabólico — Planos Paralelos

CURVATURA DE LA PARÁBOLA

$y = -Ax^2 + B$; dónde $A = 3yB = 1; x \in [-1, 1]$

$$\kappa(x) = \frac{|\vec{v}(x) \times \vec{a}(x)|}{|\vec{v}(x)|^3}$$

$$\vec{v}(x) = \vec{r}' = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$$

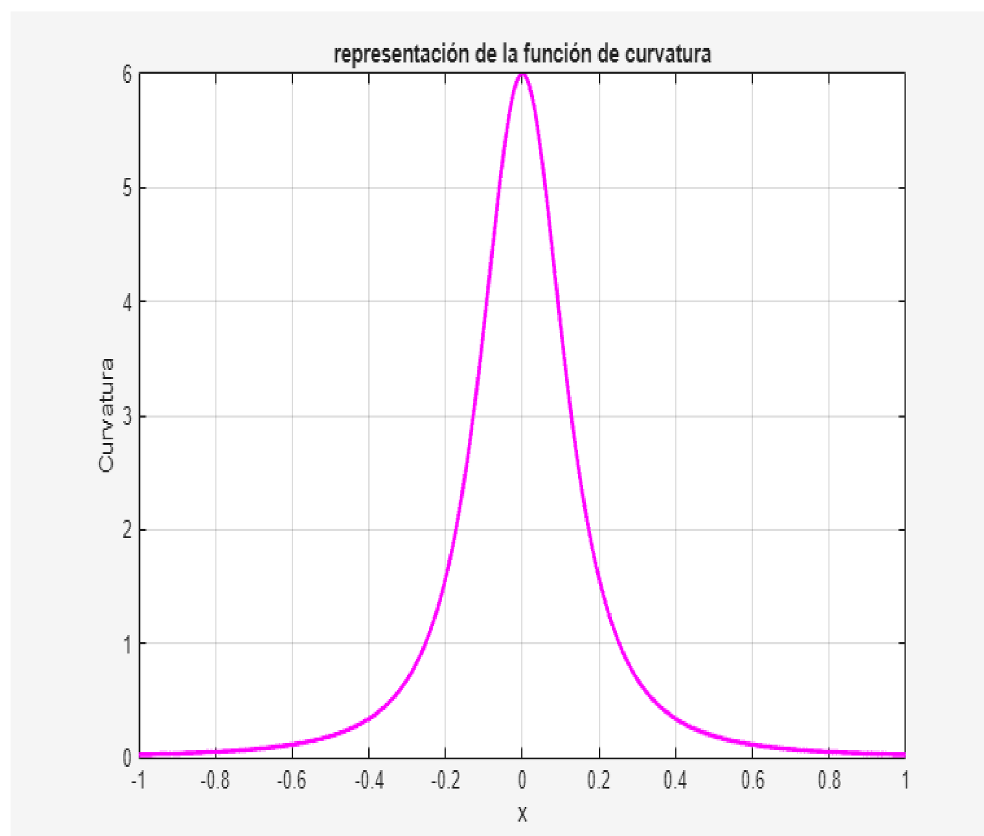
$$\overrightarrow{e_z} = \frac{\gamma'_z}{h_z} = \vec{k}\,\varepsilon)\vec{j}$$

$$\vec{v}(x) \times \vec{a}(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\vec{k}$$

Para $x = -1$: $k(-1) = \frac{6}{(1+36)^{3/2}} = 0{,}027$

Para $x = 1$: $k(1) = \frac{6}{(1+36)^{3/2}} = 0{,}027$

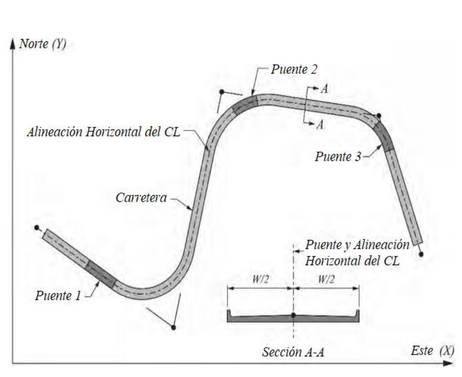
Para $x = 0$: $k(0) = \frac{-6}{(1)^{3/2}} = 6$



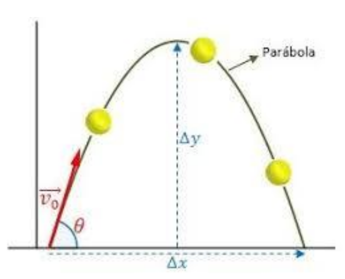
PARÁBOLA: USO EN LA INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

En esta área la parábola se emplea por varios motivos: distribución uniforme de cargas en puentes y presas; alineaciones suaves (con pendiente adecuada) en carreteras para una mayor seguridad vial; determinación del ancho y alto de un túnel para que circulen los vehículos adecuados por él; y en cubiertas son empleadas por su gran belleza estética (más su eficiencia estructural).



OTROS USOS



La física de la parábola es empleada en diversos ámbitos, se suele estudiar su composición de MRU y MRUA en deportes, balística…Además, de su propiedad de reflexión : cualquier punto cualquier rayo que entra perpendicular a la directriz (paralelo al eje focal) se refleja y pasa directamente por el foco.