

G61 ONDAS Y CAMPOS VECTORIALES EN UN ARCO

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos | Teoría de Campos

Marco Antonio Vives Rocamora // Pelayo Álvarez Fernández
Javier Portabella Fernández // Álvaro Rodríguez Aparicio // Javier Sánchez Torres

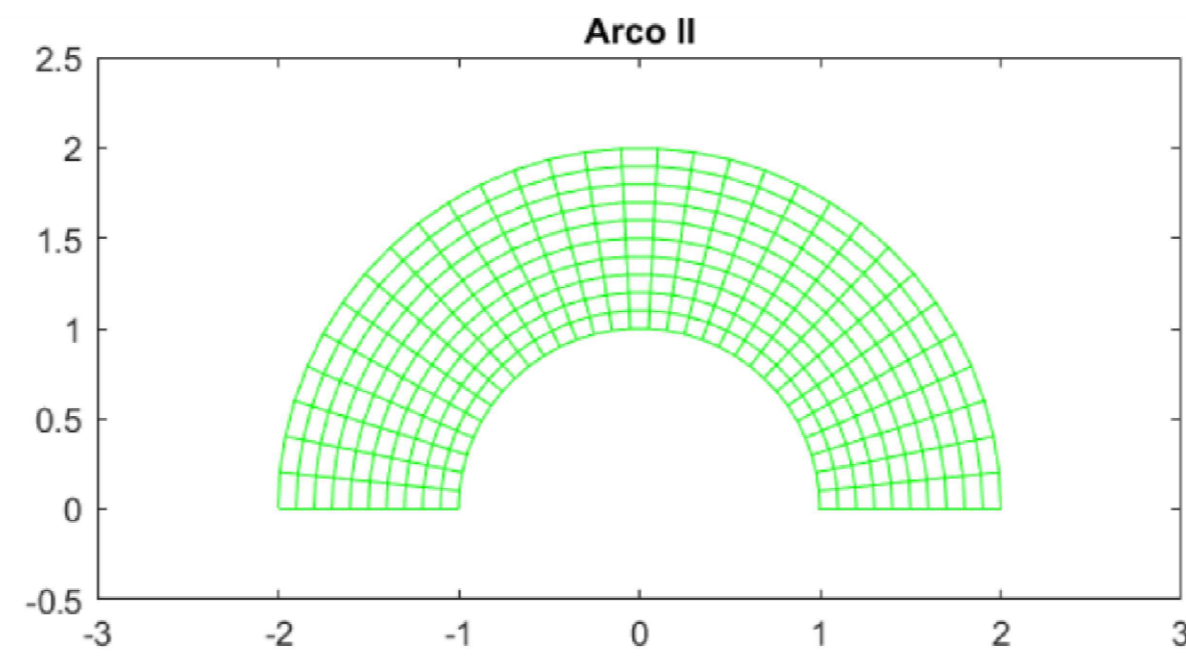
El análisis de campos escalares y vectoriales es fundamental en muchas áreas de la ingeniería, como la transmisión de calor, la deformación de estructuras o la distribución de tensiones en medios continuos. En este trabajo se estudia un dominio en forma de arco para entender como se comportan la temperatura, el gradiente y un desplazamiento radial cuando actúan sobre una región curvada. La representación gráfica y el cálculo de las magnitudes asociadas permiten interpretar de manera intuitiva la evolución de estos campos y su relación con la geometría del sólido.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

- El objetivo del trabajo es analizar el comportamiento de varios campos definidos sobre un dominio con geometría de arco comprendido entre los radios 1 y 2. Sobre esta región se estudian la temperatura $T(x,y) = (x-y)^2$, su gradiente y el efecto de un desplazamiento radial $u(\rho,\theta) = (1/5)(\rho-1)\rho \cdot e_\rho$ aplicado al sólido.
- A partir de estos campos se calculan magnitudes fundamentales como la divergencia, el rotacional y las tensiones internas, que permiten interpretar como responde el arco ante una deformación radial. El uso de una malla polar facilita la evaluación y la representación gráfica de todas estas cantidades dentro del dominio.

CAMPO A ESTUDIAR

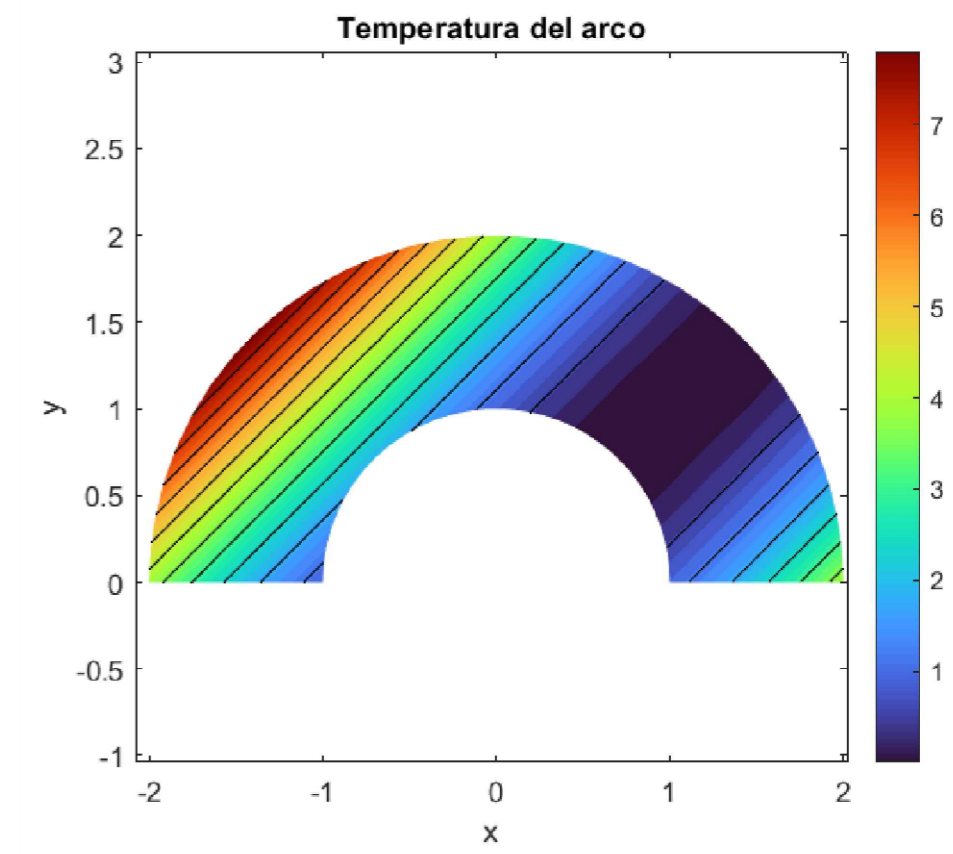
- El dominio considerado es un arco circular comprendido entre los radios 1 y 2.
- Esta geometría se discretiza mediante una malla en coordenadas polares, formada por curvas radiales y circunferenciales que permiten evaluar con precisión los distintos campos definidos en el estudio.
- El mallado proporciona la estructura necesaria para representar la temperatura, el gradiente y el desplazamiento radial sobre todo el dominio.



El arco se discretiza mediante una malla en coordenadas polares formada por radios y circunferencias. Esta estructura permite evaluar con precisión los distintos campos del estudio en todos los puntos del dominio.

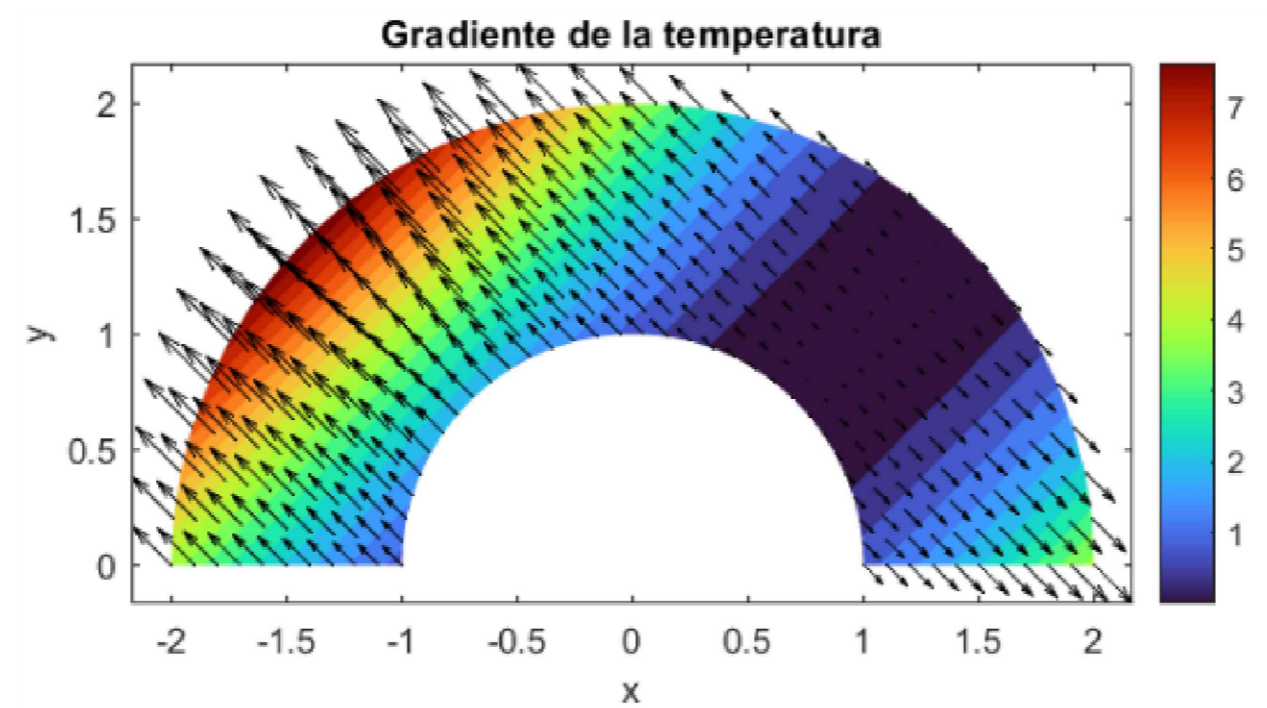
ESTUDIO DE LA TEMPERATURA

- La temperatura del arco viene dada por $T(x,y) = (x-y)^2$, lo que genera valores mínimos en los puntos donde $x = y$ y temperaturas crecientes al separarse de esa diagonal.
- La representación en el dominio muestra bandas inclinadas de igual temperatura, que permiten identificar visualmente las zonas donde la variación térmica es más acusada.



GRADIENTE DE LA TEMPERATURA

- El gradiente de la temperatura describe como cambia $T(x,y)$ en cada punto del dominio.
- Su dirección coincide con el sentido de mayor crecimiento y su magnitud mide la intensidad de dicho incremento. En el arco analizado, el gradiente presenta flechas casi paralelas debido a que $T(x,y) = (x-y)^2$ depende únicamente de la diferencia entre las coordenadas x e y . La representación visual permite identificar de manera directa las zonas donde la variación térmica es más intensa.



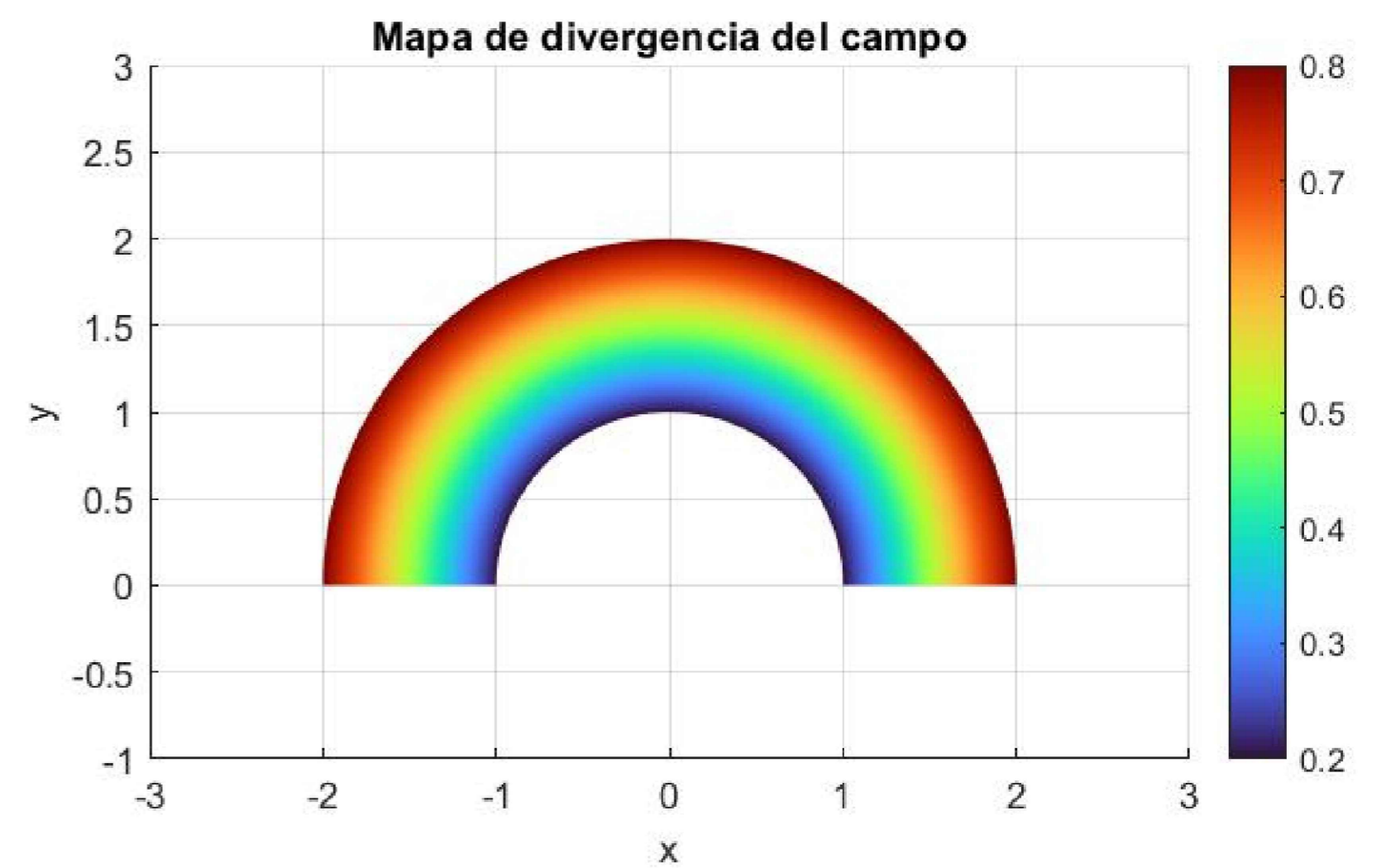
DIVERGENCIA DEL CAMPO U

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{5}(2\rho - 1) = \frac{1}{5}(3\rho - 2) \quad \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right)$$

- A partir de la fórmula general de la divergencia de un campo escalar en coordenadas cilíndricas hallamos la divergencia de u , observando que ésta únicamente depende del radio (ρ).
- El gráfico se muestra una interpretación cromática de la divergencia del campo u en nuestra placa, cuyo dominio es para $1 \leq \rho \leq 2$, donde las zonas con colores más cálidos muestran mayor divergencia y las de colores más fríos menor. Es por tanto la zona roja ($\rho=2$) la de mayor divergencia.
- La divergencia mide el cambio de volumen local debido al desplazamiento, es decir, si hay fuentes (expansión) o sumideros (compresión). Por lo tanto:

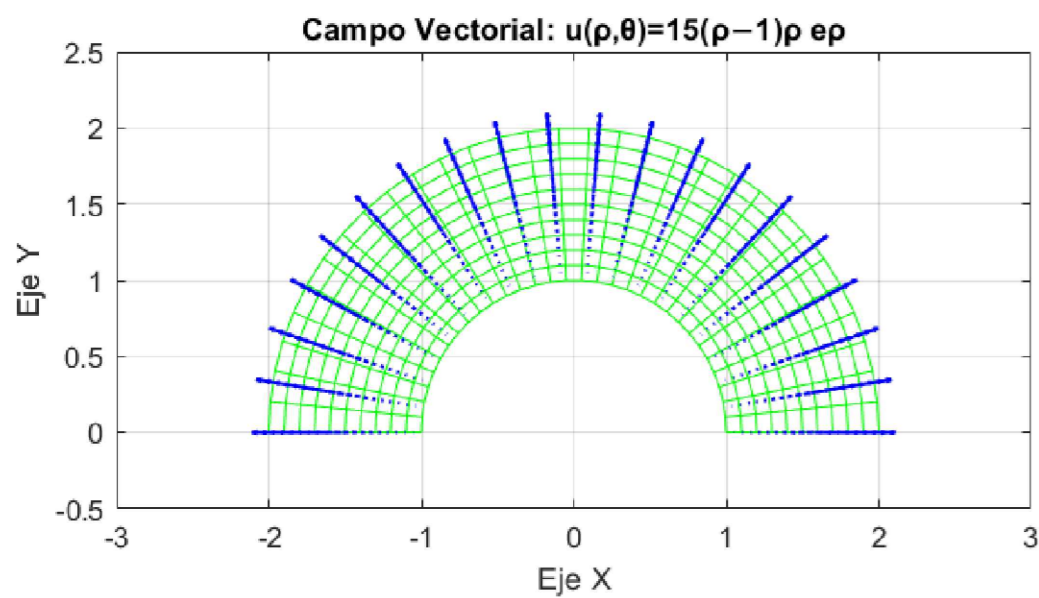
- Como es positiva en todo su dominio, cada volumen diferencial (célula del mallado) se está expandiendo.
- Si aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss sobre nuestra región obtenemos la variación de volumen total, que por ser positivo, afirmamos que el volumen, tras el desplazamiento u , será mayor que el inicial (la placa se expande).

$$\Delta V = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot u) dA = \oint_{\partial \Omega} u \cdot n ds \quad \Delta V = \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{3\rho - 2}{5} \right) \rho d\rho d\theta = \frac{4\pi}{5}$$



CAMPO VECTORIAL EN EL SÓLIDO

- Tenemos el campo vectorial en coordenadas cilíndricas: $u(\rho,\theta) = (1/5)(\rho-1)\rho \cdot e_\rho$.
- Como podemos ver, el campo carece de componente angular, es estrictamente radial. Esto se puede ver en el dibujo, los vectores apuntan desde dentro hacia fuera en líneas rectas.
- La ecuación muestra una dependencia respecto a la distancia al origen, a medida que aumenta el radio se produce un crecimiento de la norma de los vectores, siendo nula en el radio interior y máxima en el exterior.
- Si hacemos zoom, podemos ver que las líneas azules están formadas por infinidad de flechas apuntando hacia el radio externo y que aumentan de tamaño según nos vamos alejando del interior del semianillo.



DESPLAZAMIENTO DEL SÓLIDO

En este apartado, consideramos que el campo vectorial: $u(\rho,\theta) = (1/5)(\rho-1)\rho \cdot e_\rho$; es el desplazamiento sufrido por el sólido.

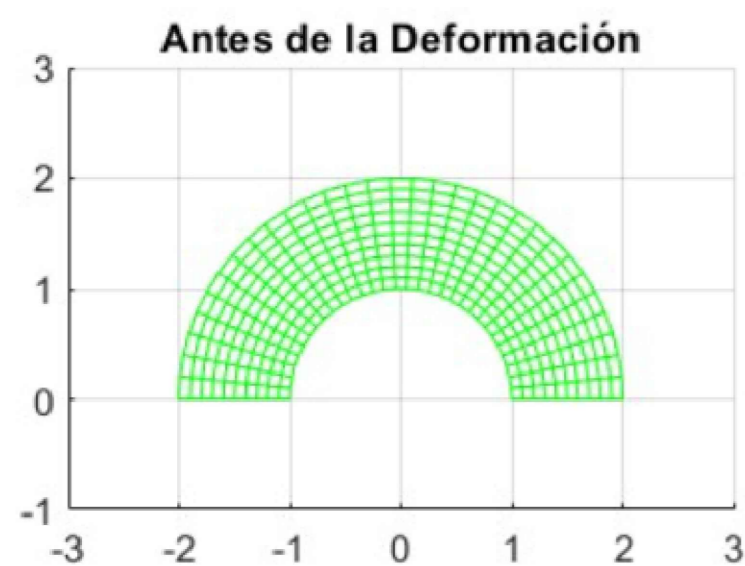
Voy a dibujar el sólido antes del desplazamiento (VERDE) y después del desplazamiento (ROJO).

El campo de desplazamiento impuesto provoca que los puntos en el radio interior permanezcan fijos, mientras que los puntos exteriores sufren un

desplazamiento progresivo hacia afuera resultando en una expansión radial del sólido.

Si observamos los ejes, en el inicial el radio exterior era igual a 2 y, por tanto, el anillo era tangente a $x=2, y=2, y=-2$.

Tras la deformación, podemos ver que estas líneas ya no son tangentes sino que cortan al semianillo.



TENSIONES TANGENCIALES

RESPECTO AL PLANO ORTOGONAL A e_ρ

En este caso el campo de desplazamientos es completamente radial, sin componente angular.

Por ello, la tensión tangencial sobre el plano ortogonal a e_ρ es nula en todo el dominio.

La expresión que daría lugar a la componente tangencial se anula de forma idéntica, de modo que no aparece ningún esfuerzo cortante asociado a esta dirección.

No existe campo de tensiones tangenciales que representar en este plano.

RESPECTO AL PLANO ORTOGONAL A $1/\rho \cdot e_\theta$

En este caso el campo de desplazamientos es completamente radial, sin componente angular.

Por ello, la tensión tangencial sobre el plano ortogonal a e_ρ es nula en todo el dominio.

La expresión que daría lugar a la componente tangencial se anula de forma idéntica, de modo que no aparece ningún esfuerzo cortante asociado a esta dirección.

No existe campo de tensiones tangenciales que representar en este plano.

ROTACIONAL CAMPO U

- Calculamos el rotacional del campo u a partir de la fórmula general para coordenadas cilíndricas, haciendo un determinante con derivadas parciales.
- Como resultado obtenemos un rotacional nulo, por lo que el campo u es irrotacional o conservativo (la integral del campo a lo largo de una curva no dependerá de la curva, sino de los puntos inicial y final).
- Además, como nuestra región es simplemente conexa podemos asegurar que nuestro campo u tendrá potencial escalar. Por tanto:

- Podemos expresar u como el gradiente de otro campo escalar

$T: u = \text{grad}(T)$

- El campo u es ortogonal a las superficies equipotenciales en cada punto. Esto se debe a que el gradiente es ortogonal a la superficie.

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_\rho & \rho u_\theta & u_z \end{vmatrix} \quad \nabla \times \vec{u} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{2\rho-1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{\rho^2-\rho}{5} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{e}_\rho + 0\vec{e}_\theta + 0\vec{e}_z$$

BIBLIOGRAFÍA

- Apuntes de Teoría de Campos - Barragán y Sánchez (UPM)
- Advanced Engineering Mathematics - Kreyszig
- Mathematical Methods for Physicists - Arfken y Weber
- Vector Analysis (Schaum) - Spiegel
- Documentación Oficial de MATLAB (MathWorks)
- ChatGPT (OpenAI) - Apoyo en Redacción y Verificación