LA CICLOIDE

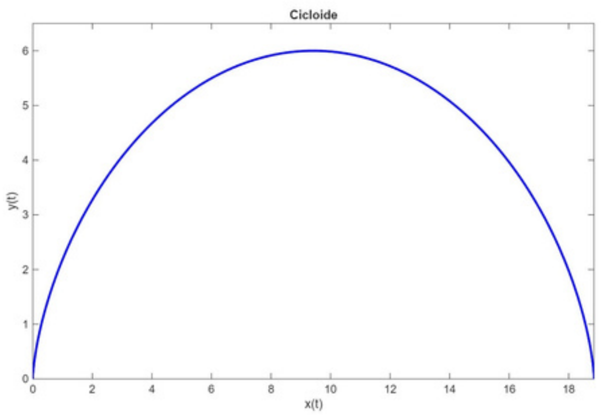
Sofia Navarro, Raquel Aguilar, Clara Lasheras, Laura Sangil y Alba Silván

INTRODUCCIÓN

La curva cicloide es una curva plana generada por un punto fijo contenido en una circunferencia, que rueda sin deslizar sobre una línea recta.
Entonces, se considera la parametrización:

$$\boxed{\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \big(R(t - \sin t), R(1 - \cos t)\big)}$$

$t \in (0, 2\pi)$, para un cierto radio, R, fijado.
En este trabajo se establecerá R=3

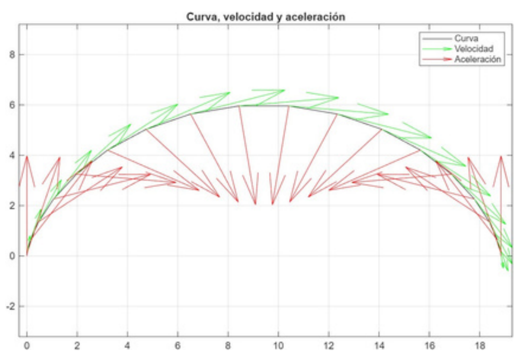


VECTORES VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Se obtienen los campos de velocidad y aceleración a través de las fórmulas:

$$\boxed{\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{\gamma(t)}}{dt} = (3 - 3cos(t), 3sen(t))}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = (3sen(t), 3cos(t))}$$



LONGITUD DE LA CURVA

La longitud de la curva se calcula mediante la integral del módulo de la velocidad (cuyo vector hemos calculado anteriormente), entre 0 y 2pi

$$Longitud = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_0^{2\pi} R\sqrt{2(1 - cos(t)}dt = \int_0^{2\pi} R2sin(\frac{t}{2})dt = R2\int_0^{2\pi} sin(\frac{t}{2})dt = -\frac{1}{2}cos(\frac{t}{2})|_0^{2\pi} 4R =$$
$$= 8R = [R = 3] = 24u$$

CAMPO TANGENCIAL Y NORMAL

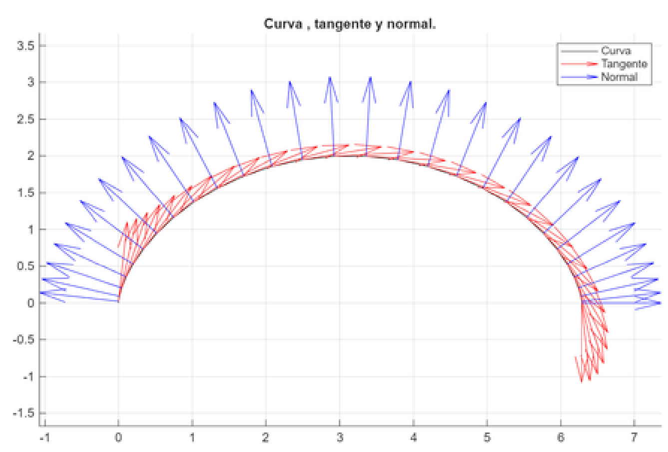
El vector tangente es un vector unitario en dirección del vector velocidad e indica la dirección del movimiento en la curva.
Para calcular el vector tangencial dividimos el vector velocidad entre su módulo: $\overrightarrow{t(t)} = \frac{\overrightarrow{v(t)}}{|\overrightarrow{v(t)}|}$
$= sin(t/2)\,\overrightarrow{i} + cos(t/2)\,\overrightarrow{j}$

El vector normal es el vector ortogonal al vector tangente. Indica hacia donde gira la curva. El cálculo del vector normal lo haremos mediante la siguiente operación: $\overrightarrow{n(t)} = \overrightarrow{b(t)} \times \overrightarrow{t(t)}$

Y para ello necesitamos calcular el vector binormal, que tiene la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{b(t)} = \frac{\overrightarrow{v(t)} \times \overrightarrow{a(t)}}{|\overrightarrow{v(t)} \times \overrightarrow{a(t)}|} = \overrightarrow{(-k)}$$

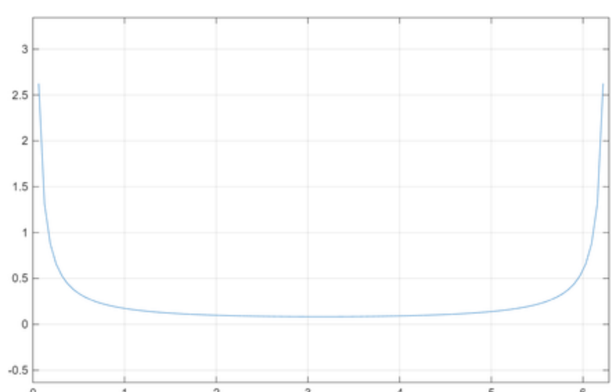
Realizando el producto vectorial de ambos obtenemos: $\overrightarrow{n(t)} = cos(t/2)\,\overrightarrow{i} - sen(t/2)\,\overrightarrow{j}$



CURVATURA

La curvatura describe como cambia la dirección de la tangente a lo largo de la curva. Mide qué tanto se desvía una curva de ser una línea recta. Esta función viene definida por la expresión:

$$\kappa(t) = \frac{\left|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right|}{\left|\vec{v}(t)\right|^3} = \frac{4\cos(t) - 4}{(8 - 8\cos(t))^{3/2}}$$



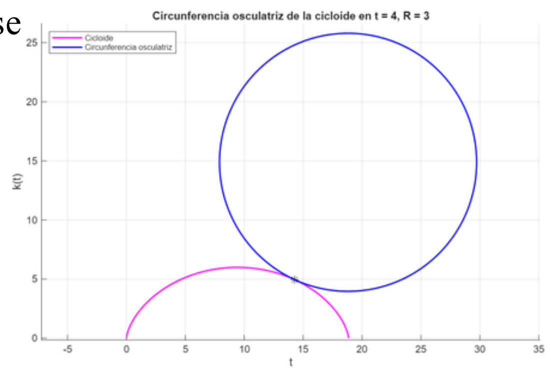
CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ EN P

Es el círculo que mejor aproxima la curva en ese punto. Las ecuaciones para hallar el centro y radio son:

$P = \gamma(t)$ con $t = 4$

Centro: $Q(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{n}(t) =$

Radio: $R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|} = \ldots$

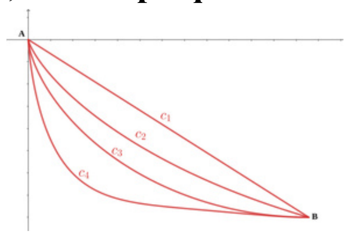


FENÓMENOS QUE DESCRIBE LA CICLOIDE Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA

La cicloide es una curva que se dio a conocer en el **siglo XVII**, una época de gran desarrollo matemático.

En cuanto a sus aplicaciones se encuentran:

- **Braquistócrona**: representa una cicloide invertida y corresponde a la **curva con descenso más rápido entre dos puntos no verticales**, más rápido incluso que si lo hiciese en línea recta.
- **Tautócrona** (tambien conocida como curva isócrona o de ¨igual tiempo¨) indica que si un objeto se deslizase por este arco de cicloide invertida, **el siempo que tarda en llegar al punto más bajo de este, es siempre el mismo**, independientemente del punto de partida.



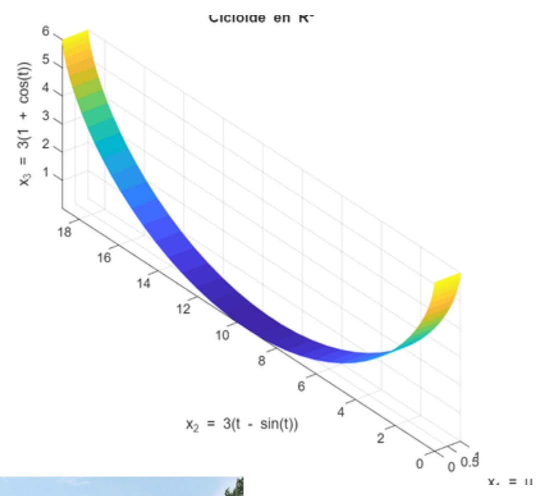
Aplicaciones en ingeniería

- **Puentes y arcos, bóvedas:** la forma cicloidal distribuye las cargas de manera eficiente.
- **Cinemática y engranajes**: el movimiento cicloidal se emplea en perfiles de engranajes y mecanismos para reducir desgaste y mejorar transmisión

LA CICLOIDE EN R3 E IMÁGENES EN ESTRUCTURAS CIVILES

Para la representación de la superficie S se extenderá una unidad en la dirección de i cada punto de la cicloide en R3.
Se asignan el parámetro u a x

$$S(u,t)\begin{cases} x_1 = u & : u \in [0,1] \\ x_2 = 3(t - sint) & : t \in [0,2\pi] \\ x_3 = 3(1 + cost) & \end{cases}$$



En cuanto a estructuras civiles tenemos

Museo de arte de Kimbell

Numerosos puentes usan la forma cicloidea

MASA DE LA SUPERFICIE

Dada la densidad:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1)(1 + x_2)x_3$$

Entonces la masa es una integral doble

$$M = \int\int_S f(x_1, x_2, x_3)\, dS$$

En la que al sustituir la densidad

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+u)\big(1 + R(t - \sin t)\big)\, R(1 + \cos t)\, 2R\sin\frac{t}{2}\, du\, dt.$$

Al resolver analíticamente en MATLAB mediante el método de los rectángulos se optiene que la masa aproxima son 750,584 unidades.