Ecuaciones de Laplace y Poisson

Ángela Sotelo Fernández, Carmen Doñoro Molina, Inés Torres Gómez, Rubén Gutiérrez Hernández y Violeta Luján Barrios (Grupo ACIRV).

27/04/2025

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior | Universidad Politécnica de Madrid

Motivación

Las ecuaciones de Laplace y Poisson son parte fundamental de la física y la ingeniería, pues describen cómo se comportan diferentes campos potenciales, como el campo eléctrico, gravitacional o de temperatura. La distribución del potencial eléctrico en ausencia de cargas libres satisface la ecuación de Laplace, mientras que en presencia de cargas, se modela mediante la de Poisson. En este trabajo estudiaremos estas ecuaciones y finalmente modelizaremos un campo eléctrico.

Ecuación de Laplace

En este trabajo vamos a estudiar dos formas diferentes de resolver el siguiente problema sobre la ecuación de Laplace:

$$\begin{vmatrix} \Delta u = 0, & x \in B_1 \\ u = g, & x \in \partial B_1 \end{vmatrix},$$

con $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ la bola centrada en el origen de radio 1.

Resolución por la fórmula de Poisson

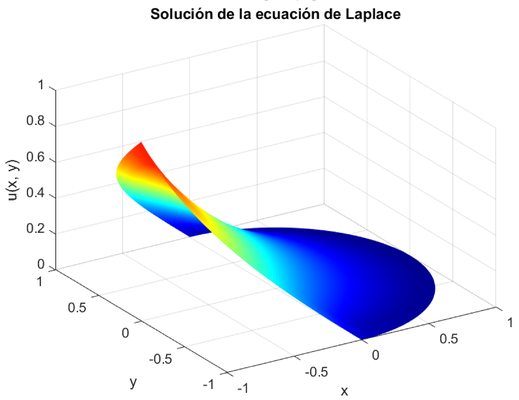
Primero, resolvemos el problema empleando la fórmula de Poisson, que, como sabemos, es:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_1} \frac{g(\sigma)}{|x-\sigma|^2} d\sigma, \quad x \in \partial B_1.$$

Tomando $g(\theta) = \max\{0, 1 - \frac{2}{\pi}|\theta - \pi|\}$ en coordenadas polares, con $R = 1$, obtenemos:

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(s)}{1 + r^2 - 2rcos(s-\theta)} ds.$$

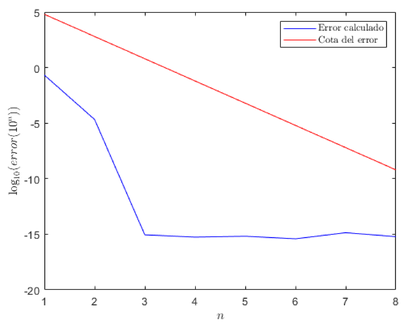
Nótese que en la frontera no se puede usar la fórmula mencionada previamente debido a la singularidad de la integral. Es por ello por lo que imponemos directamente la condición frontera.
Gracias a MATLAB resolvemos la integral y graficamos la solución:



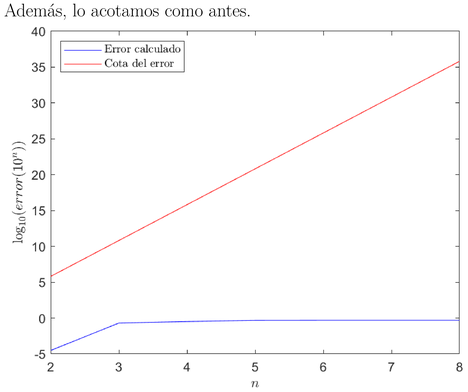
Limitaciones de la fórmula de Poisson

Como la fórmula de Poisson tiene problemas para aproximar la solución cerca de la frontera, decidimos tomar $g(x,y) = xy$ como condición frontera y $u(x,y) = xy$ como solución del problema para calcular los diferentes errores que genera la fórmula.

Para estudiar el error fijamos un punto lejano a la frontera para evitar problemas en la convergencia de la solución en su entorno: $(r,\theta) = (0.9, \pi/4)$. Veamos la diferencia entre el valor real de u y el valor de la aproximación por la fórmula de Poisson en ese punto, en función de n (determina el número de puntos en 10^n). Cabe esperar que la fórmula aproxime bien a la función, y por lo tanto, el error disminuya según aumenta el número de intervalos. Nótese que se estabiliza cuando llega a $n = 3$, pues con 10^3 puntos el método del trapecio aproxima lo suficientemente bien a la función original.
Si usamos la fórmula del error máximo del método del trapecio para obtener una cota para el error, vemos que los errores calculados numéricamente se encuentran por debajo de la cota. Para nuestro problema, tenemos que $Error = \frac{(2\pi)^3}{12n^2} f''(\xi) \leq \frac{(2\pi)^3}{12n^2} \frac{10}{(r-1)^6}$.



Para un punto lejano a la frontera basta aproximar la integral con 10^3 puntos para que sea prácticamente exacta. Por lo que aumentamos el número de puntos en la fórmula del trapecio, fijando el ángulo a $\pi/4$, y calculamos el error variando r para cada punto de la forma $\{(1-10^{-n}, \pi/4)\}_{n \in \mathbb{N}-\{1\}}$. Según nos acercamos a la frontera los errores son cada vez mayores. Nótese que el error se estabiliza en $n = 3$, pues para este valor de n el punto ya esta suficientemente cerca de la frontera como para representar todo el error que se da en esta, y por ello, aunque nos acerquemos más (aumentando n) el error mantiene su valor. Además, lo acotamos como antes.

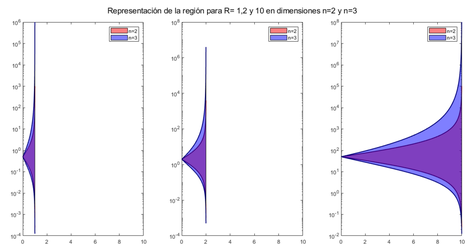


Desigualdad de Harnack

En esta sección vamos a usar la desigualdad de Harnack para obtener la región que contiene a todas las soluciones armónicas de la ecuación de Laplace que valen lo mismo en el origen que la solución calculada.
La desigualdad de Harnack establece que dada una función $u \geq 0$ armónica en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $B_R(z) \subset \Omega$ con $z \in \Omega$, entonces:

$$\frac{R^{n-2}(R-r)}{(R+r)^{n-1}} u(z) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+r)}{(R-r)^{n-1}} u(z).$$

Para poder aplicarla a nuestro problema, tomamos la función armónica positiva $v = U + M$, siendo $U(r,\theta) = \frac{r^2}{2R^2} sin(2\theta)$ la solución al problema en B_R , y M el mínimo de $G(\theta) = R^2 sin(\theta) cos(\theta)$ en B_R.



Observaciones:

1. Ambas restricciones se van al infinito cuando llegan al radio correspondiente a la bola en la que están calculadas. Esto tiene sentido pues observamos que el denominador de la cota superior se anula cuando $r = R$ y por tanto, se va a infinito al igual que su logaritmo (análogo para la cota inferior).
2. El pico que forman ambas restricciones se estrecha cuando aumentamos el radio de la bola.
3. Al aumentar la dimensión aumenta la región que definen ambas restricciones, independientemente del radio.

Ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^2$

Hasta ahora, se ha estudiado el problema de Laplace en regiones acotadas. A diferencia de las secciones anteriores, ahora se estudiará el caso en un dominio no acotado, concretamente en $\mathbb{R}^2$. Usaremos el potencial logarítmico para, a partir de la solución fundamental, aproximar $\left|\Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^2\right.$, cuando f es la función característica de la bola de radio 1.

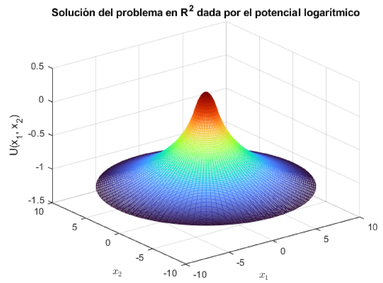
En $\mathbb{R}^2$ la solución fundamental tiene la expresión $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|)$. Si consideramos el potencial logarítmico de la función f, la convolución de la solución fundamental con f, entonces podríamos expresar la solución como $u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) f(y) dy$. Sin embargo, el laplaciano de la solución fundamental no es integrable. Para solucionarlo tomamos f como la función característica de la bola de radio 1, asegurando que el potencial logarítmico es solución para la ecuación pues f es una función con soporte compacto. Por tanto, la solución es la siguiente:

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{B_1} log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y}.$$

Haciendo el cambio $\mathbf{y} = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ obtenemos:

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 rlog((x_1 - rcos(\theta))^2 + (x_2 - rsin(\theta))^2) dr d\theta.$$

Integrándola numéricamente con MATLAB obtenemos su gráfica.



Modelización campo eléctrico

En esta sección utilizaremos las soluciones de los problemas para modelizar un campo eléctrico. Por convenio, en un campo eléctrico, los elementos positivos van al negativo.

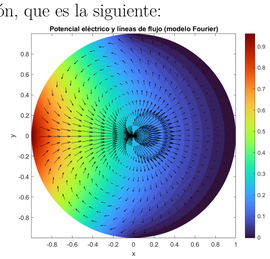
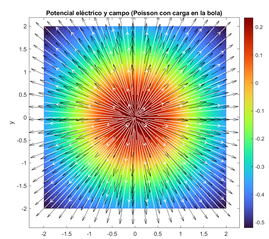
La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para un problema con condiciones de frontera dadas en la circunferencia $r = 1$ se puede expresar mediante una serie de Fourier en θ. Por simetría de $g(\theta)$, podemos utilizar solo los términos de la serie que contienen $\cos(n\theta)$.
Los coeficientes de la expansión de Fourier, a_n, se calculan utilizando la fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) \, d\theta$$

La solución general en coordenadas polares es entonces:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n \cos(n\theta)$$

Utilizamos la función **quiver** de MATLAB para pintar las líneas de campo encima de la solución, que es la siguiente:



Veamos ahora la solución dada por la ecuación de Poisson mencionada en el anterior apartado: