

# Diferentes soluciones de la ecuación del calor en una dimensión

Paula León, Noé Rico, Leo Zambrano

Universidad Politécnica de Madrid

## Introducción

En este póster se desarrollan las soluciones para un problema concreto de la evolución del calor en una vara y se modifican distintas condiciones y parámetros para ver cómo afecta a dichas soluciones. Además se utilizan estas para comprobar distintos resultados teóricos como el principio del Máximo y el de comparación.

A lo largo de este póster, salvo que se especifique lo contrario, se utilizarán espacios de Hilbert en las funciones medibles en  $(-1, 1)$ , con el producto escalar en  $L^2$  para la condición inicial en  $t = 0$ . Igualmente, la convergencia de esta función a una solución del problema será con la norma asociada a dicho producto escalar.

## Sistema modelizado

Se considera una varilla metálica que ocupa el intervalo  $[0, 1]$  y que se encuentra aislada por su superficie lateral, de manera que la conducción de calor solo se produce en la dirección longitudinal. La temperatura inicial de la varilla es  $10^\circ\text{C}$ . En el extremo derecho se mantiene la temperatura a  $10^\circ\text{C}$ , mientras que en el izquierdo la temperatura es siempre de  $1^\circ\text{C}$ .

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 1 & t > 0 \\ u(1, t) = 10 & t > 0 \\ u(x, 0) = 10 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

## Solución del estado estacionario

Cuando  $t \rightarrow \infty$  el sistema alcanza un estado estacionario y por tanto podemos mirar el sistema dependiendo solo de la posición. Nos queda por tanto el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \\ v(0) = 1 \\ v(1) = 10, \end{cases}$$

cuya solución es  $v = 9x + 1$ .

## Solución por separación de variables

Para homogeneizar las condiciones de contorno, restamos la solución estacionaria

$$v(x) = 9x + 1,$$

y definimos

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x).$$

De este modo,  $w$  satisface

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0, t) = 0, & w(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = 10 - (9x + 1) = 9 - 9x. \end{cases}$$

Buscamos ahora soluciones de la forma

$$w(x, t) = X(x)T(t).$$

Al sustituir en la ecuación obtenemos el problema espectral asociado, cuyas autofunciones son

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin(n\pi x), \\ T_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}. \end{cases}$$

Por tanto, la solución se expresa como una serie de Fourier seno usando (de aquí en adelante a menos que se diga lo contrario) la base ortonormal en  $L^2(-1, 1)$  por extensión:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Por la teoría de álgebra lineal y geometría, sabemos que en una base ortonormal los coeficientes  $C_n$  se calculan como producto escalar y se determinan imponiendo la condición inicial,

$$9 - 9x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x),$$

$$C_n = \frac{\int_{-1}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx}{\int_{-1}^1 (\sin(n\pi x))^2 dx} = \frac{18}{n\pi}.$$

Así, obtenemos

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable,

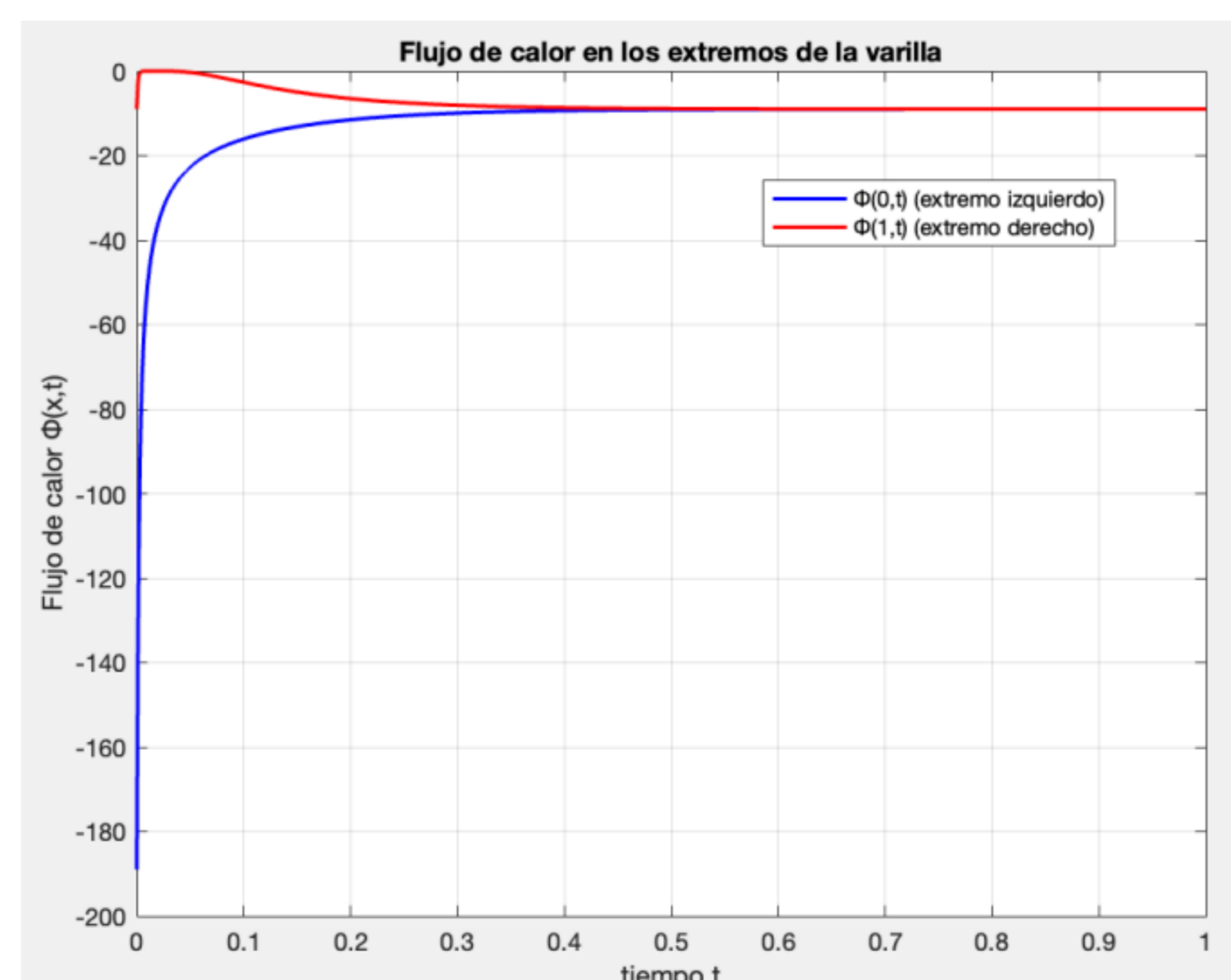
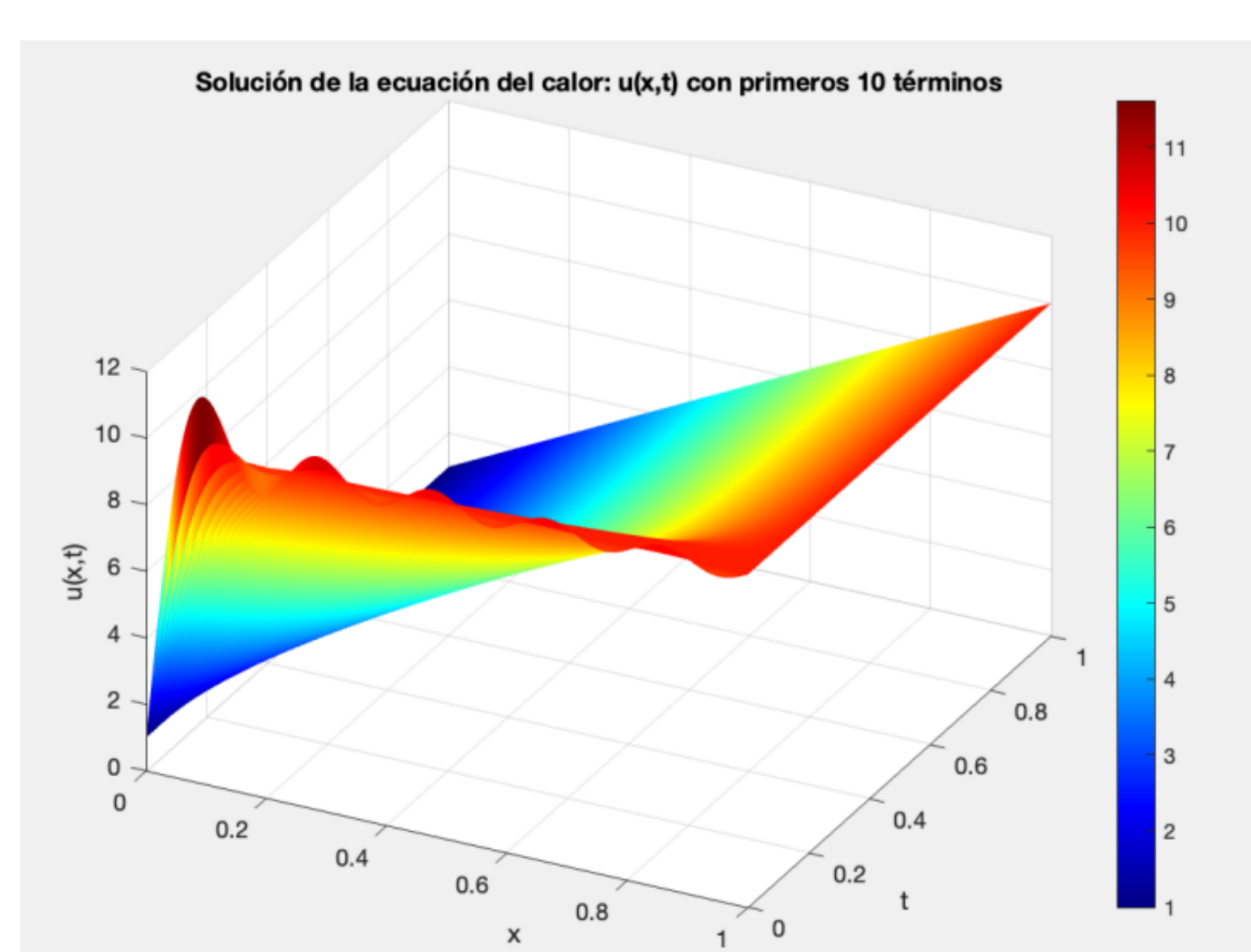
$$u(x, t) = w(x, t) + v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t} + (9x + 1).$$

Se observa además que, cuando  $t \rightarrow \infty$ , los términos exponenciales se anulan y la solución converge al estado estacionario:

$$u(x, t) \rightarrow 9x + 1.$$

## Gráfica de la solución y del flujo en los extremos

Para  $t \in [0, 1]$  tomando los primeros 10 términos de la serie y discretizamos con Matlab el tiempo y el espacio, con una malla 1000x1000 para mejores aproximaciones (cosa que usaremos en todas las gráficas), obteniendo:



Efectivamente la solución tiende a estacionaria. Además, se observa un flujo saliente (el signo indica la dirección del flujo) en el extremo izquierdo, es decir, la vara se enfriará rápidamente debido a las condiciones iniciales entre el extremo y el resto de la vara. En el extremo derecho el flujo es entrante, es decir, la vara se calienta. Las imperfecciones como la que hay en  $t = 0$  se deben a la aproximación de Fourier (10 son pocos términos).

## Cambio en el coeficiente de difusión a 1/2

Veamos cómo varía esta solución modificando el coeficiente de difusión.

Si  $D$  disminuye, la difusión del calor es más lenta. Por ello, la parte espacial de la solución no cambia, pero la parte temporal pasa de

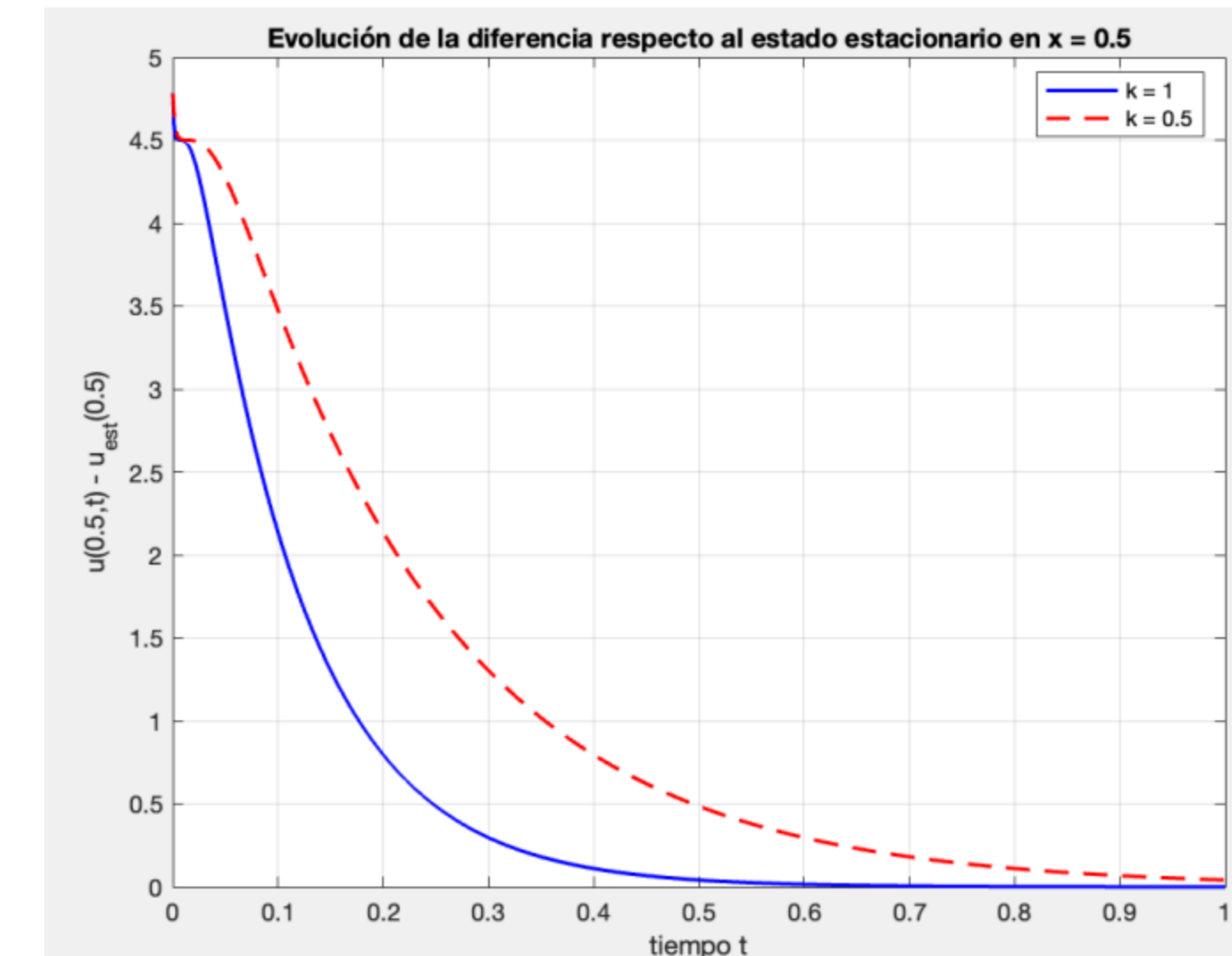
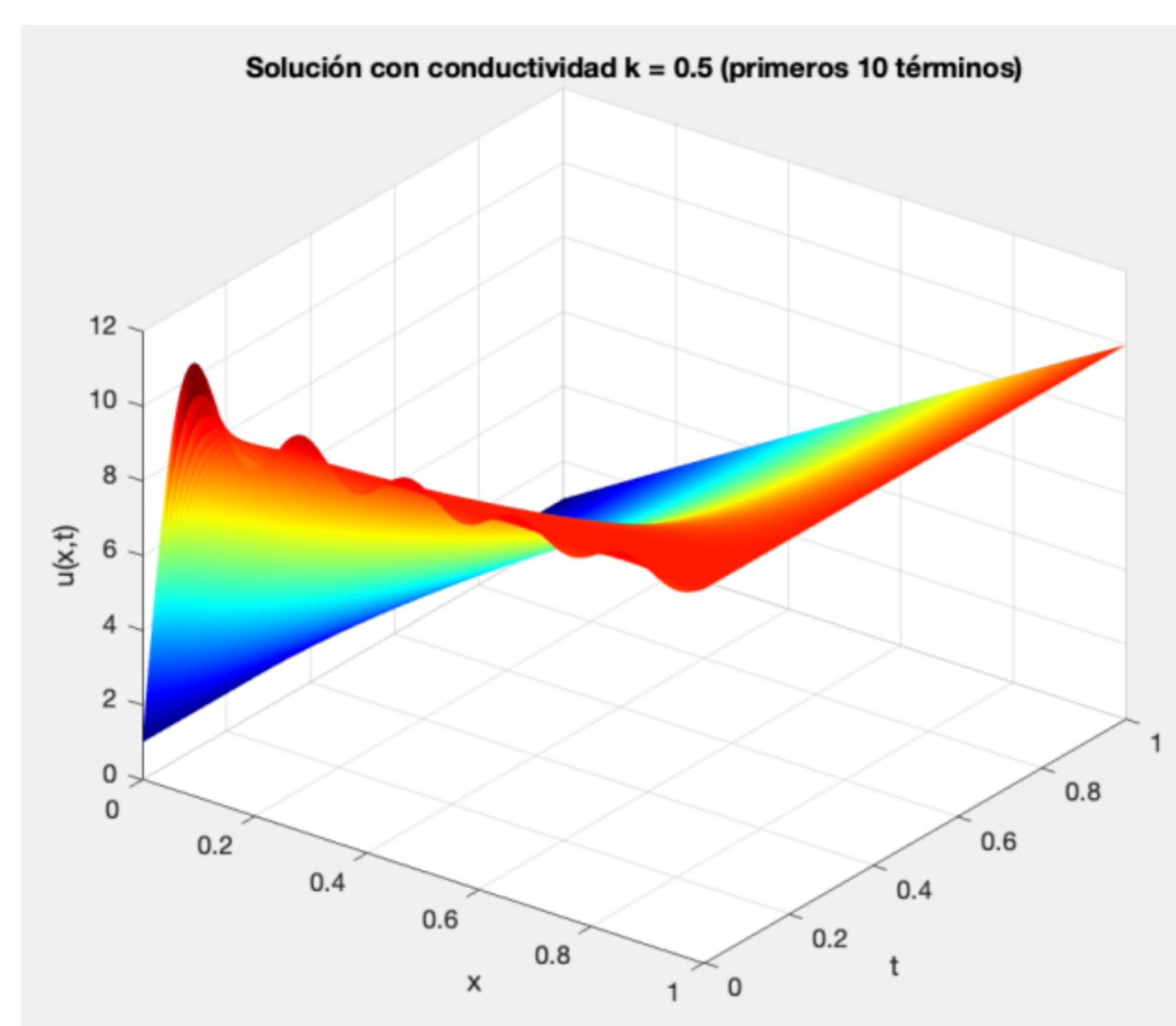
$$e^{-(n\pi)^2 t} \text{ a } e^{-\frac{(n\pi)^2}{2} t}.$$

En consecuencia, la solución tarda más en alcanzar el mismo estado estacionario. Al cambiar  $D = \frac{1}{2}$  (como consecuencia de hacer  $K = \frac{1}{2}$ ), tenemos que:

$$X(x) = A_n \sin(n\pi x), \quad T(t) = B_n e^{-\frac{(n\pi)^2}{2} t}.$$

Por tanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-\frac{(n\pi)^2}{2} t} + (9x + 1).$$



Intuitivamente esperábamos estos resultados ya que, al "cambiar el material de la vara a uno con menor coeficiente de difusión", no cambiaría la forma de distribuir la temperatura, solo el tiempo que esta tarda en alcanzar la solución estacionaria (por eso solo el término temporal se ve afectado).

## Cambio en las condiciones iniciales

Ahora probamos modificar las condiciones iniciales del problema para ver cómo afecta a la solución. Suponemos ahora que la temperatura en el extremo izquierdo es también  $10^\circ\text{C}$  pero inicialmente la temperatura de la barra viene dada por la función

$$u_0(x) = 10 - 10 \mathbf{1}_{[1/3, 2/3]}(x)$$

(aquí  $\mathbf{1}_{[a,b]}$  es la función característica del intervalo  $[a, b]$ ).

Con el cambio en nuestra ecuación y las condiciones de contorno, tenemos la siguiente solución estacionaria:

$$v(x) = 10.$$

Definiendo

$$w(x, t) = u(x, t) - 10,$$

se obtiene

$$w_t - w_{xx} = 0, \quad w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad w(x, 0) = -10 \mathbf{1}_{[1/3, 2/3]}.$$

La solución vuelve a escribirse como serie de Fourier seno:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t},$$

pero ahora los coeficientes cambian:

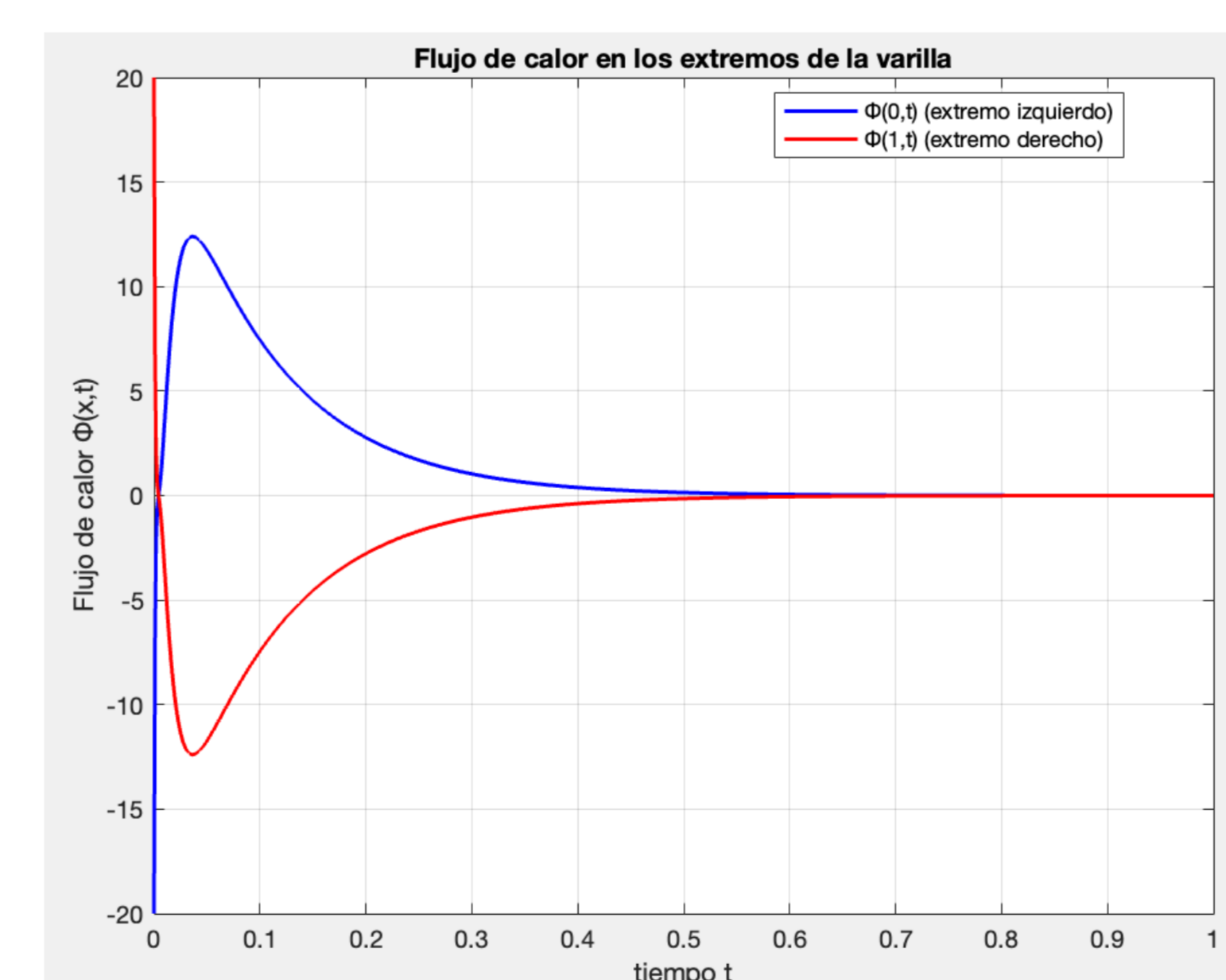
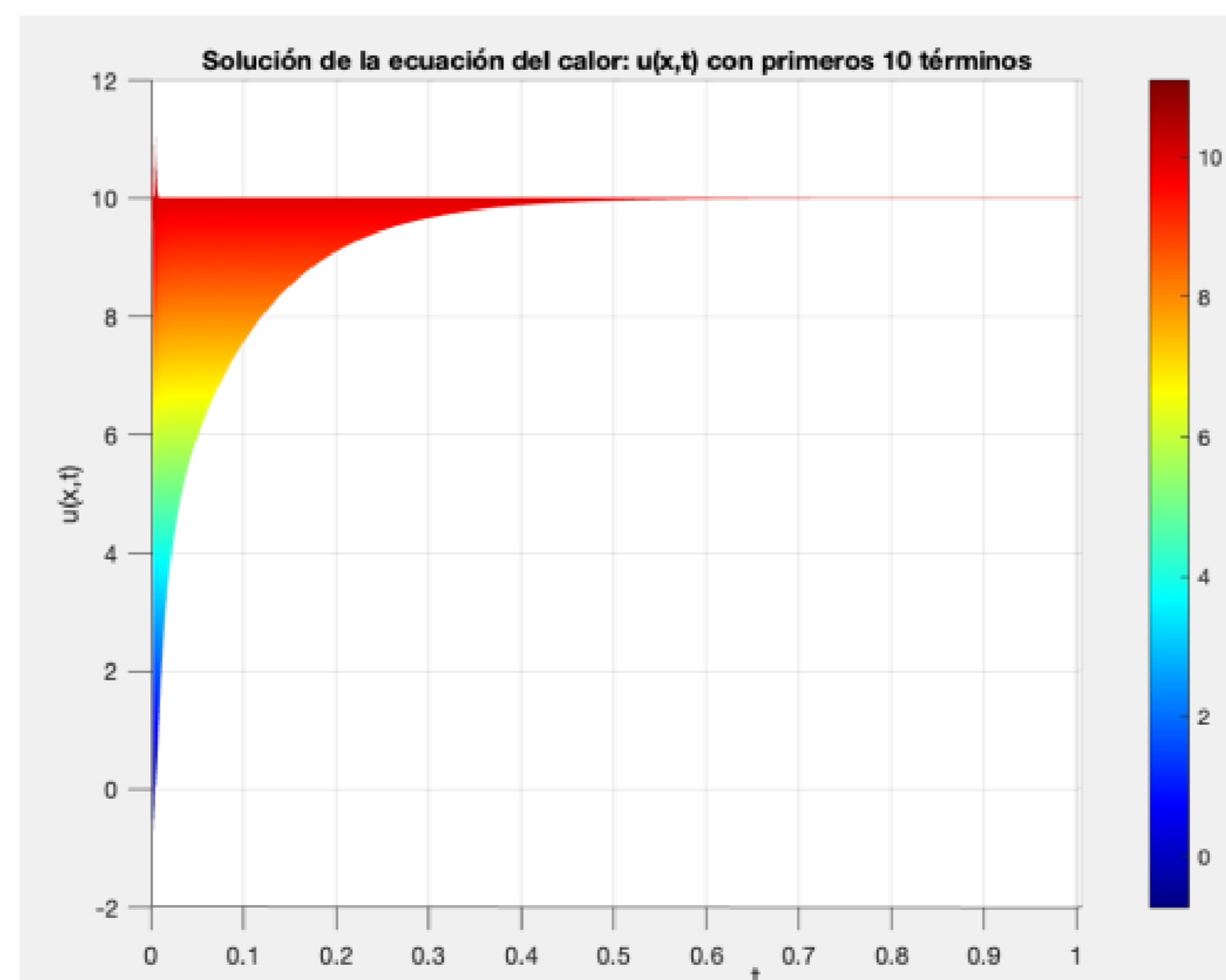
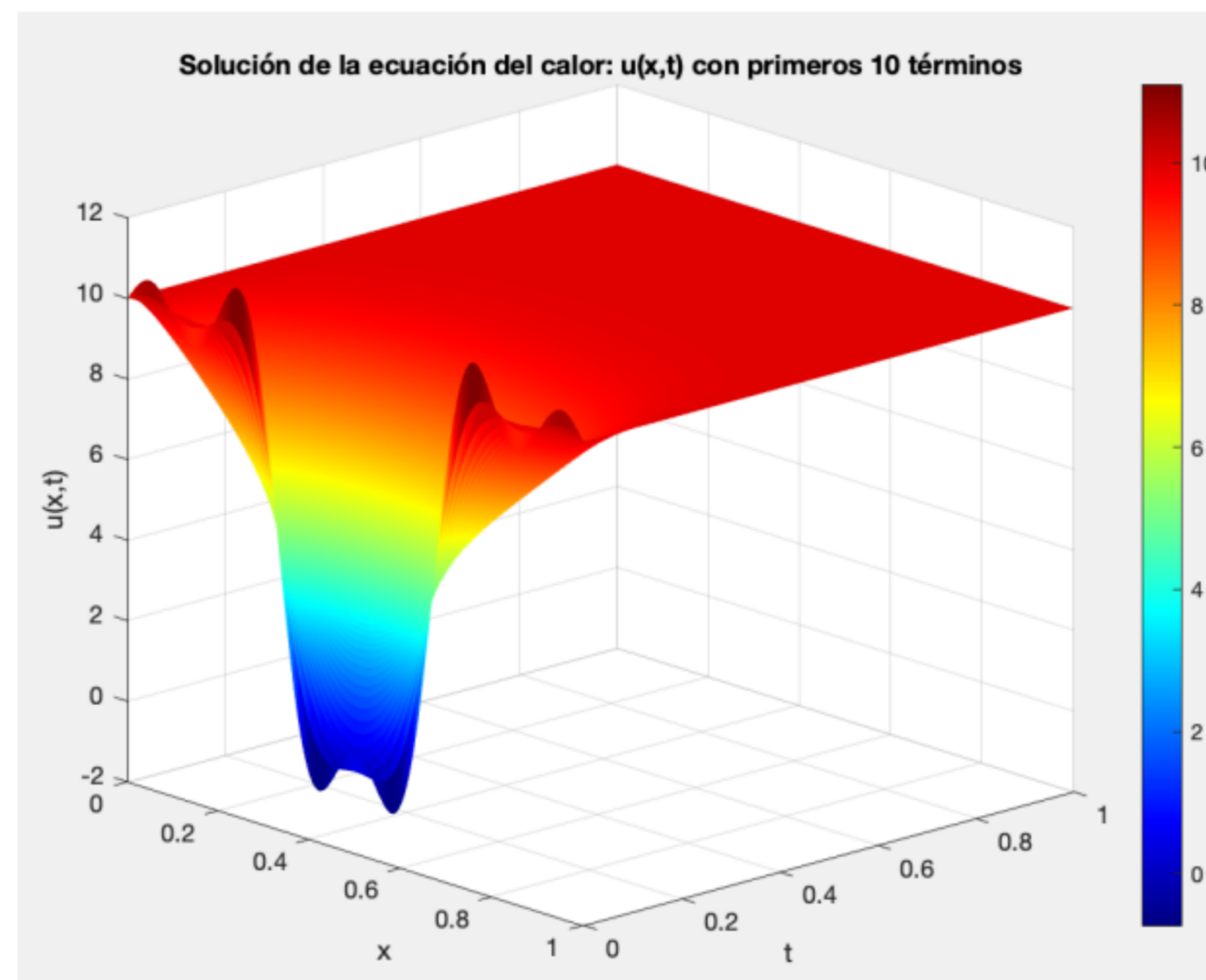
$$A_n = \frac{20}{n\pi} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right).$$

Así,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n\pi} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t} + 10,$$

y por tanto

$$u(x, t) \rightarrow 10 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$



En este caso vemos un flujo saliente en el extremo izquierdo y un flujo saliente en el extremo derecho el flujo es entrante, es decir, la vara se enfriará.

## Cambio de condiciones frontera

También podemos estudiar qué ocurre al cambiar el tipo de condiciones frontera del problema. Probamos imponer aislamiento térmico en el extremo izquierdo, manteniendo el resto de condiciones salvo la temperatura inicial en este extremo. Esto no cambia la solución estacionaria y por tanto el problema homogéneo asociado para

$$w(x, t) = u(x, t) - 10$$

queda

$$w_t - w_{xx} = 0, \quad w_x(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0.$$

Por separación de variables se obtiene el problema espectral

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

cuyas autofunciones son

$$X_n(x) = \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x\right), \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 t}.$$

Comprobamos que la base del coseno es ortonormal en  $L^2$

$$\int_{-1}^1 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x\right) \cos\left(\left(\frac{1}{2} + m\right)\pi x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((n-m)\pi x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Por tanto,

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x\right) e^{-\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 t}.$$

Además debemos tener en cuenta que utilizamos una extensión del intervalo de la función. Los coeficientes de Fourier vienen entonces dados por

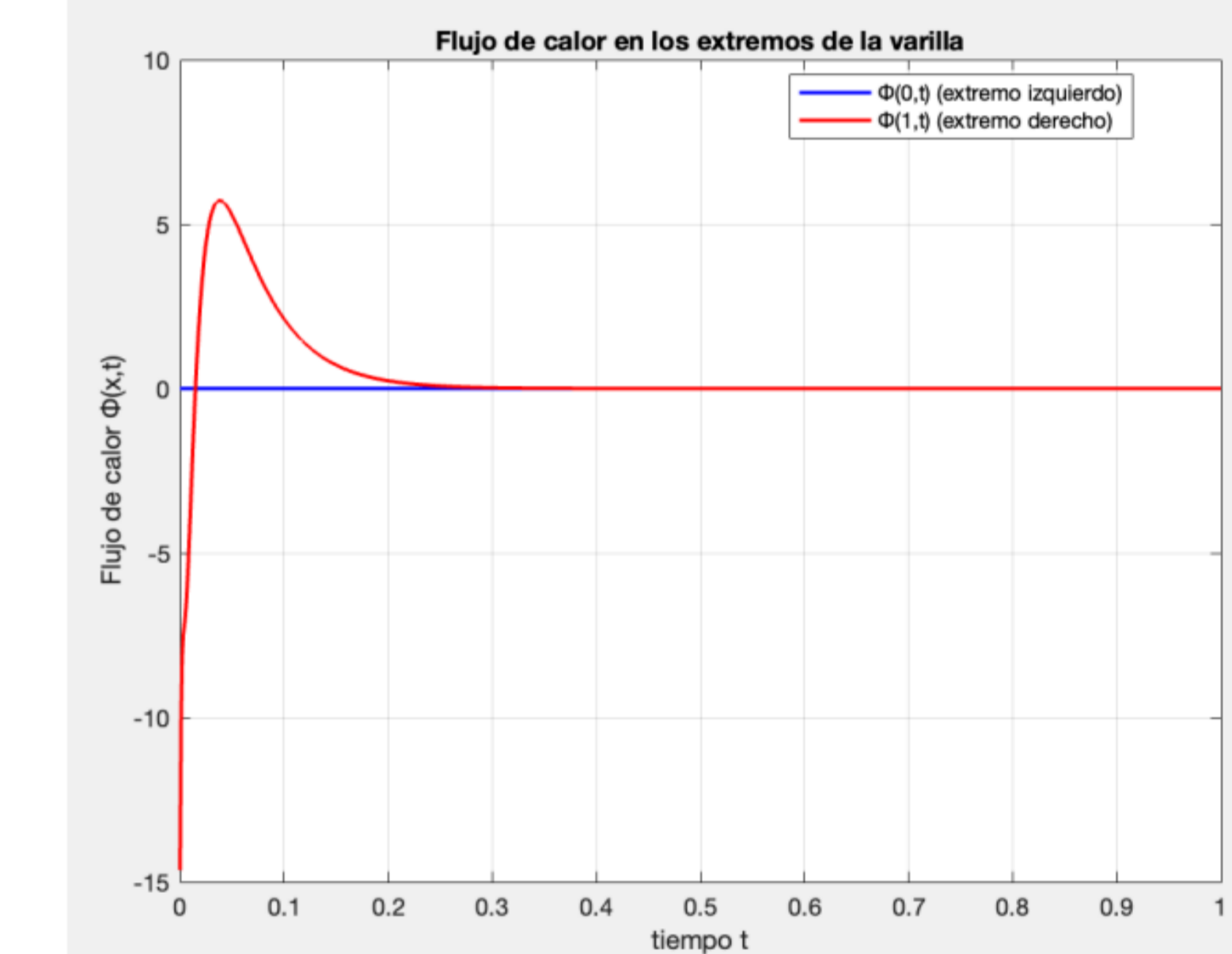
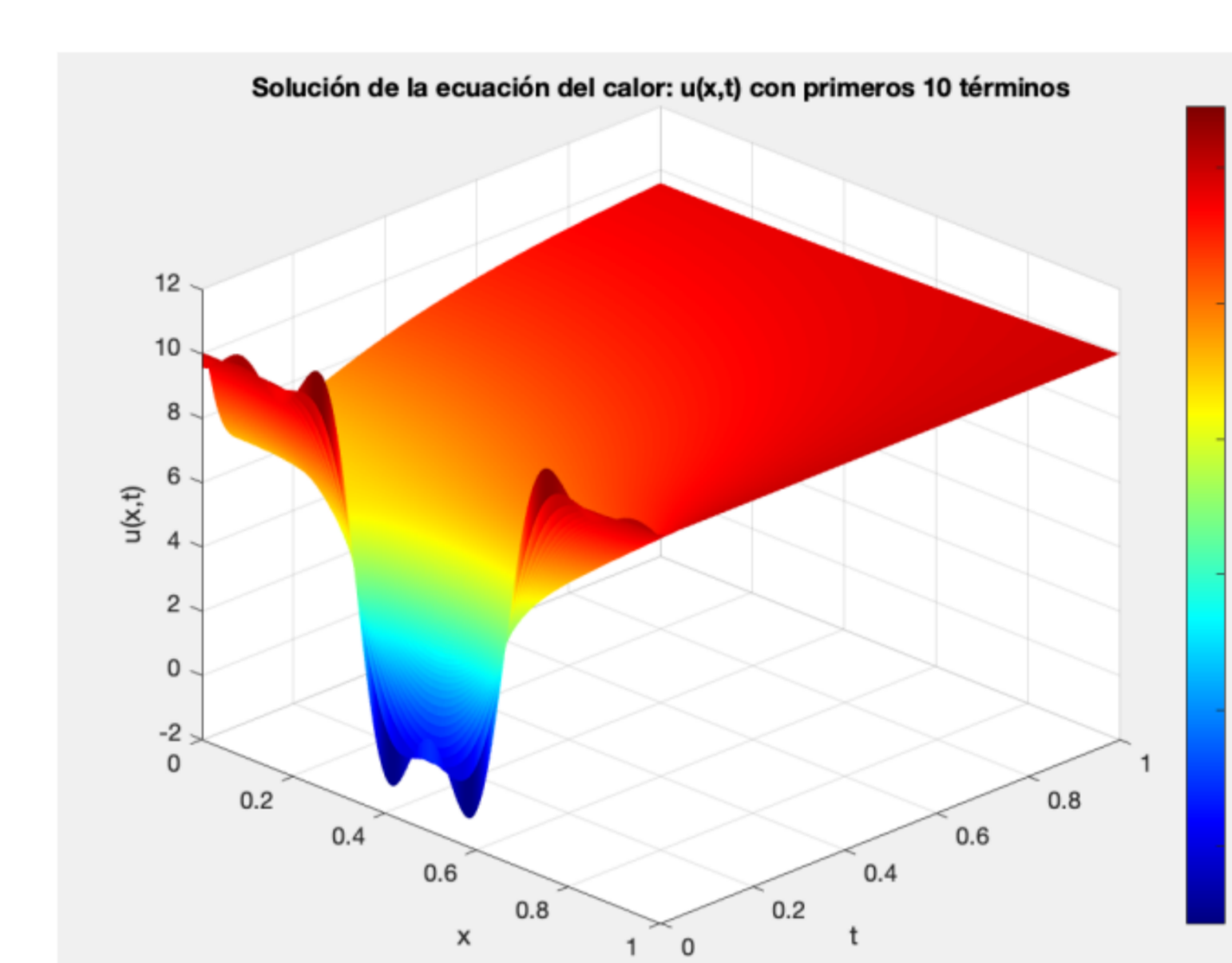
$$C_n = -\frac{20}{(1/2 + n)\pi} \left( \sin\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi\right) \right),$$

y, tras simplificar,

$$C_n = -\frac{40}{(1/2 + n)\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Finalmente,

$$u(x, t) = w(x, t) + 10.$$



Aquí vemos que la vara no alcanza la solución estacionaria en el tiempo dado. Además en este caso vemos un flujo en el extremo izquierdo está fijado en 0 (como esperábamos ya que está aislado térmicamente) y un flujo que varía en el extremo derecho, al principio entrante y después saliente (por las aproximaciones de Fourier).

## Principio del Máximo

Comprobemos que se cumple el principio del máximo.

La solución puede escribirse como una serie

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x\right) e^{-\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 t}$$

Aplicando el criterio de Weierstrass,

$$|C_n \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x\right) e^{-\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 t}| \leq \frac{20}{n\pi} e^{-\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 t_0} \quad t_0 > t$$

Por tanto, la serie converge uniformemente,  $w$  es continua y se puede aplicar el principio del máximo: el máximo y el mínimo se alcanzan en la frontera parabólica.

## Principio de Comparación

Hecho esto, podemos comprobar que se cumple el principio de comparación. Sea  $u(x, t)$  la solución del problema original. Consideramos las funciones

$$v(x, t) = 9x + 1, \quad z(x, t) = 10,$$

que también satisfacen la ecuación del calor:

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad z_t - z_{xx} = 0.$$

En la frontera parabólica se verifica

$$v(0, t) = u(0, t), \quad v(1, t) = u(1, t), \quad v(x, 0) = 9x + 1 \leq 10 = u(x, 0),$$

y por tanto

$$v(x, t) \leq u(x, t).$$

Además,

$$u(0, t) = 1 \leq 10 = z(0, t), \quad u(1, t) = 10 = z(1, t), \quad u(x, 0) = 10 = z(x, 0),$$

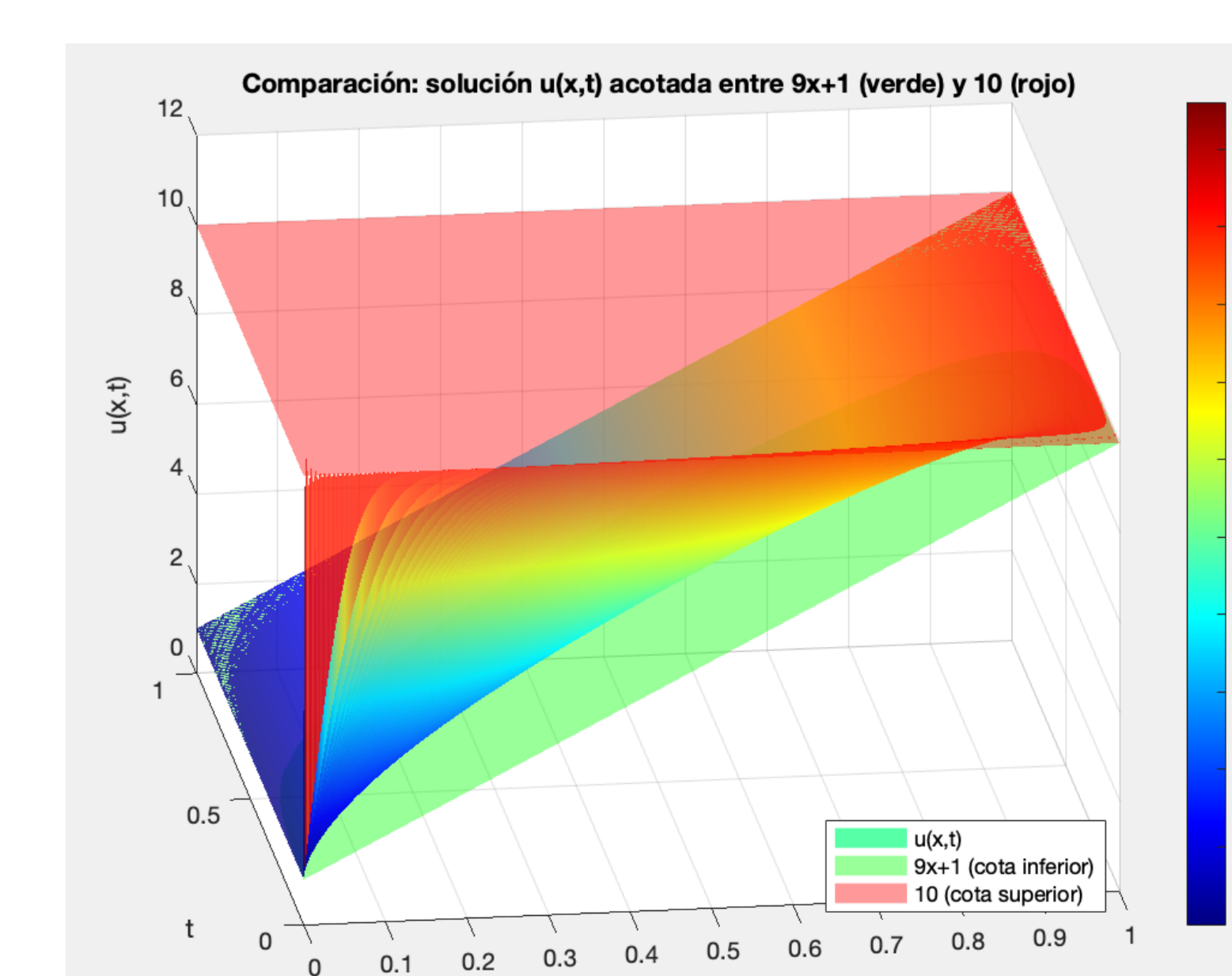
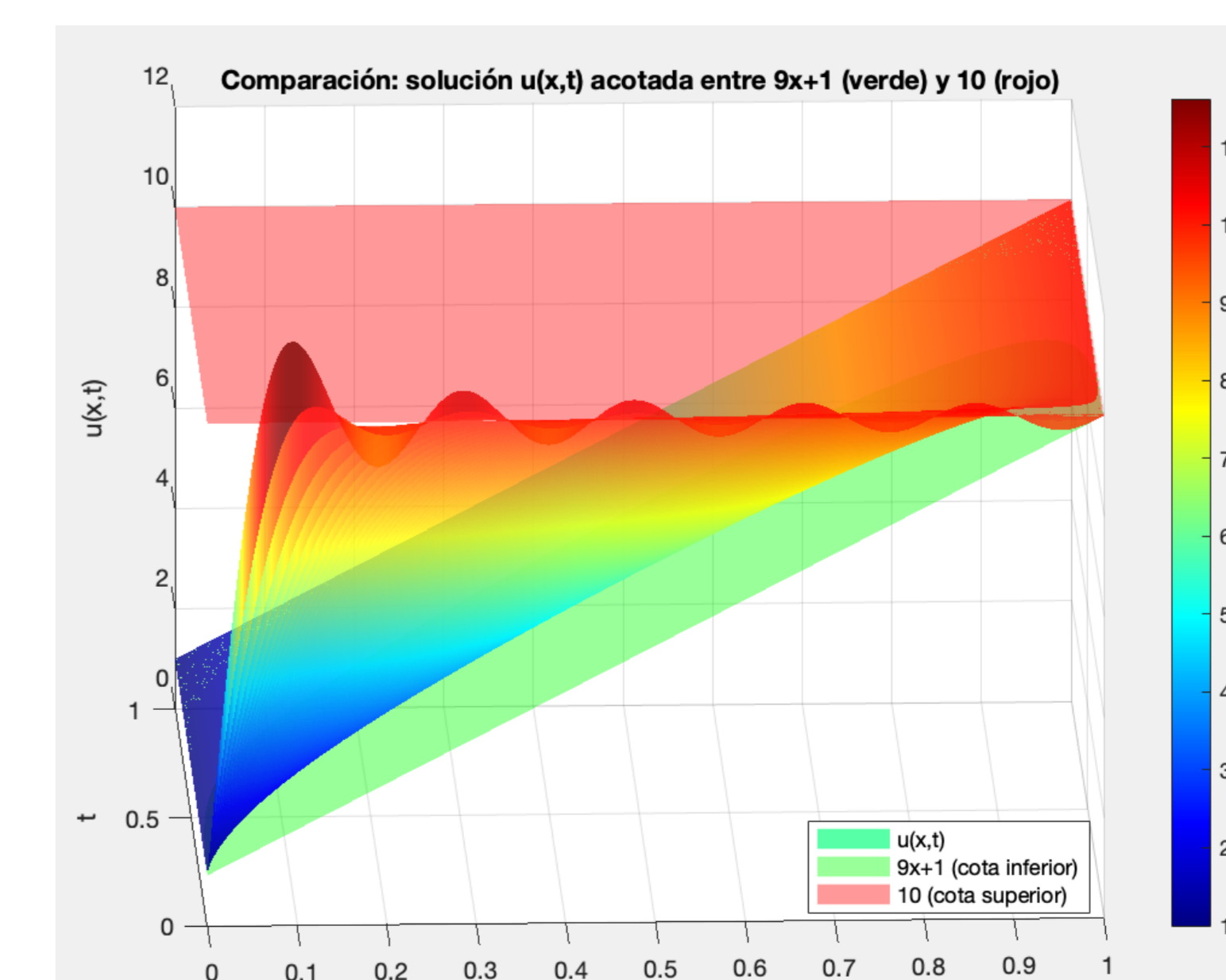
luego

$$u(x, t) \leq z(x, t).$$

Concluimos que

$$9x + 1 \leq u(x, t) \leq 10.$$

Así, la solución queda acotada entre dos soluciones comparables en la frontera parabólica.



En la imagen izquierda vemos cómo con 10 términos de Fourier, en un entorno de  $t=0$  se incumple este principio (ya que  $u$  parece ser más grande que  $z$ ). Subiendo a 1000 coeficientes vemos que claramente  $u$  queda acotada entre nuestras funciones.