

Ecuación de difusión en dominio no acotado, soluciones y propiedades

Rodrigo Gallardo, Alejandro Cogollor y Javier Martín

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior | Universidad Politécnica de Madrid



POLITÉCNICA

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es comprender las propiedades analíticas de la ecuación del calor en un dominio espacial no acotado. A diferencia de los dominios acotados, donde la solución puede hallarse mediante separación de variables, aquí nos centraremos en resolver el problema de valor inicial en \mathbb{R} . A lo largo del documento presentaremos la solución de la ecuación del calor por convolución, ilustraremos el principio del máximo y la velocidad infinita de propagación, y analizaremos el decaimiento temporal de las soluciones, comparándolo analíticamente con el caso acotado. Finalmente, extenderemos el análisis de la solución al caso multidimensional en \mathbb{R}^n .

Planteamiento y solución

Para comenzar, formulamos el problema de valor inicial para la ecuación del calor unidimensional en el espacio no acotado:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Tal y como vimos en clase, la solución fundamental asociada a este sistema es la función gaussiana:

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Esta función posee la propiedad analítica de que, para cualquier instante $t > 0$, su integral en todo el espacio es constante e igual a la unidad. Utilizando este resultado, la solución de nuestro problema se obtiene mediante la siguiente convolución:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) u_0(y) dy$$

Para que dicha integral converja, es suficiente con que el dato inicial $u_0(x)$ sea continuo por partes y no crezca más rápido que e^{cx^2} para alguna constante $c > 0$. A partir de ahora para los ejemplos ilustrativos unidimensionales usaremos el problema con dato inicial $u_0(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, resolviendo la convolución de manera numérica usando el método del trapecio con mallas inferiores a 10^{-3} .

Propiedades de la solución por convolución

La solución obtenida mediante convolución presenta propiedades analíticas y físicas que vamos a destacar:

- **Efecto regularizador:** No es necesario que el dato inicial $u_0(x)$ sea continuo o derivable para que la solución $u(x, t)$ sea de clase C^∞ para todo $t > 0$. En efecto, como el núcleo del calor $K(x, t)$ es una función suave, para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$|u(x_0, t) - u(x_1, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x_0 - y, t) - K(x_1 - y, t)| |u_0(y)| dy$$

Dado que K es continua, sus derivadas espaciales están acotadas para un $t > 0$ fijo, y hemos exigido que el crecimiento de u_0 esté controlado, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue al hacer $x_1 \rightarrow x_0$, obteniendo que $u(x, t)$ es continua respecto a x . Para estudiar la derivabilidad, consideramos el cociente incremental y tomamos el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(x - y + h, t) - K(x - y, t)}{h} u_0(y) dy$$

De nuevo, por el Teorema de la Convergencia Dominada, podemos intercambiar límite e integral, derivando directamente bajo el signo integral:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K(x - y, t)}{\partial x} u_0(y) dy$$

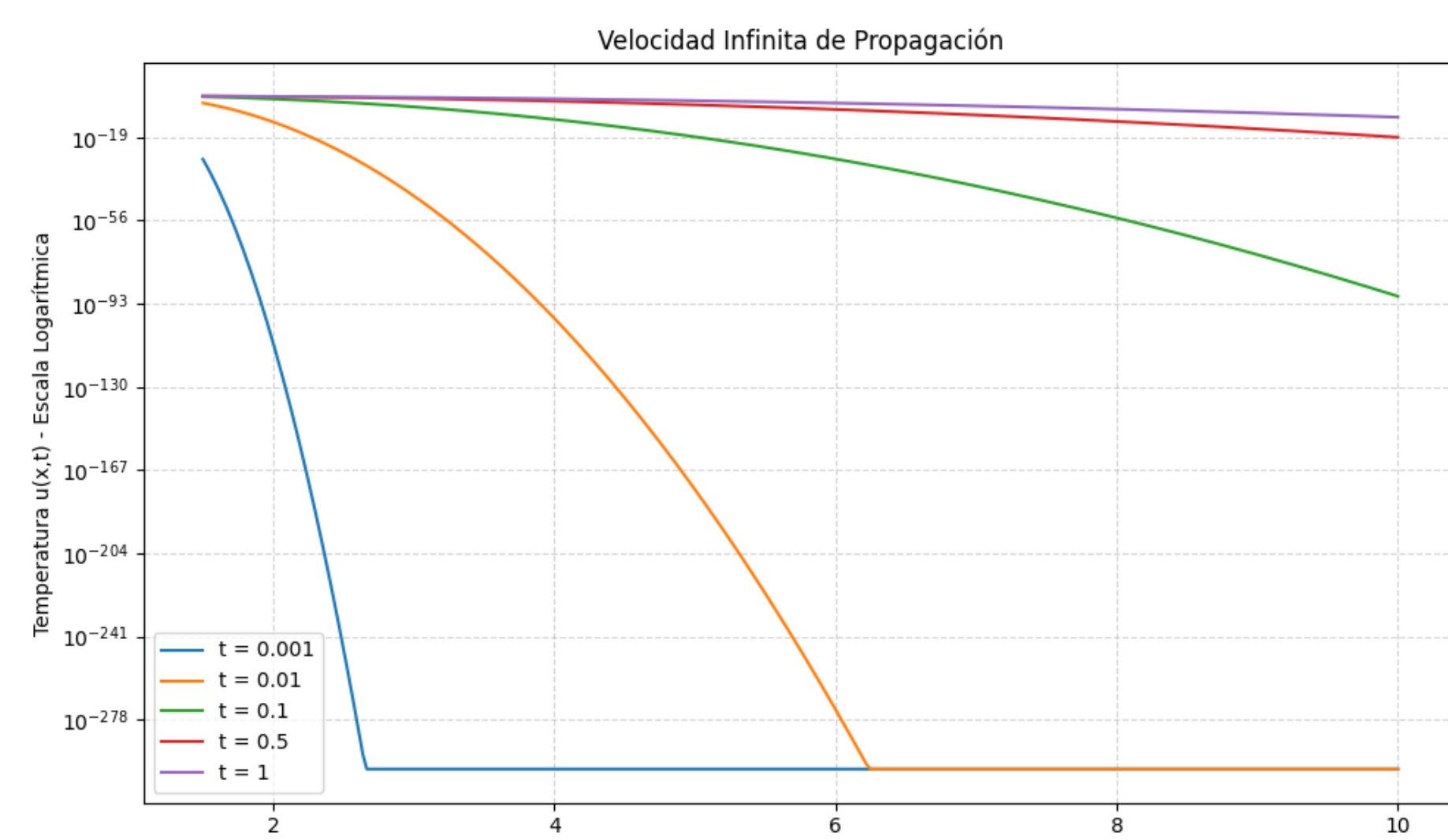
Repetiendo este argumento para derivadas de cualquier orden (tanto en x como en t), se concluye que $u(x, t) \in C^\infty$ para todo $t > 0$. La convolución con el núcleo del calor suaviza de forma instantánea cualquier irregularidad del dato inicial.

- **Velocidad infinita de propagación:** Si el dato inicial $u_0(x) \geq 0$ y no es idénticamente nulo, la estructura de la integral garantiza que:

$$u(x, t) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Esto se deduce de que $K(x, t) > 0$ en todo el espacio. Físicamente implica que el calor se propaga instantáneamente a todo el dominio; aunque la perturbación inicial esté muy localizada, su efecto se siente inmediatamente en cualquier punto de \mathbb{R} , por minúsculo que sea el valor de la temperatura.

Para visualizarlo vamos a mostrar el valor de la solución conforme nos alejamos del 1 con una gráfica en diferentes instantes de tiempo:



Esta nos muestra que pese a tener valores muy pequeños, el valor de la solución es positivo en todo punto, para $t > 0$, la limitación en la gráfica se debe a la propia limitación de la máquina.

- **Conservación de la masa (o energía térmica):** Si el dato inicial es integrable, la cantidad total de calor en la barra infinita se mantiene constante en el tiempo. Integrando la solución respecto a x y aplicando el Teorema de Fubini para intercambiar las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) dy$$

Esto ocurre precisamente porque la integral del núcleo fundamental en todo el espacio es siempre la unidad.

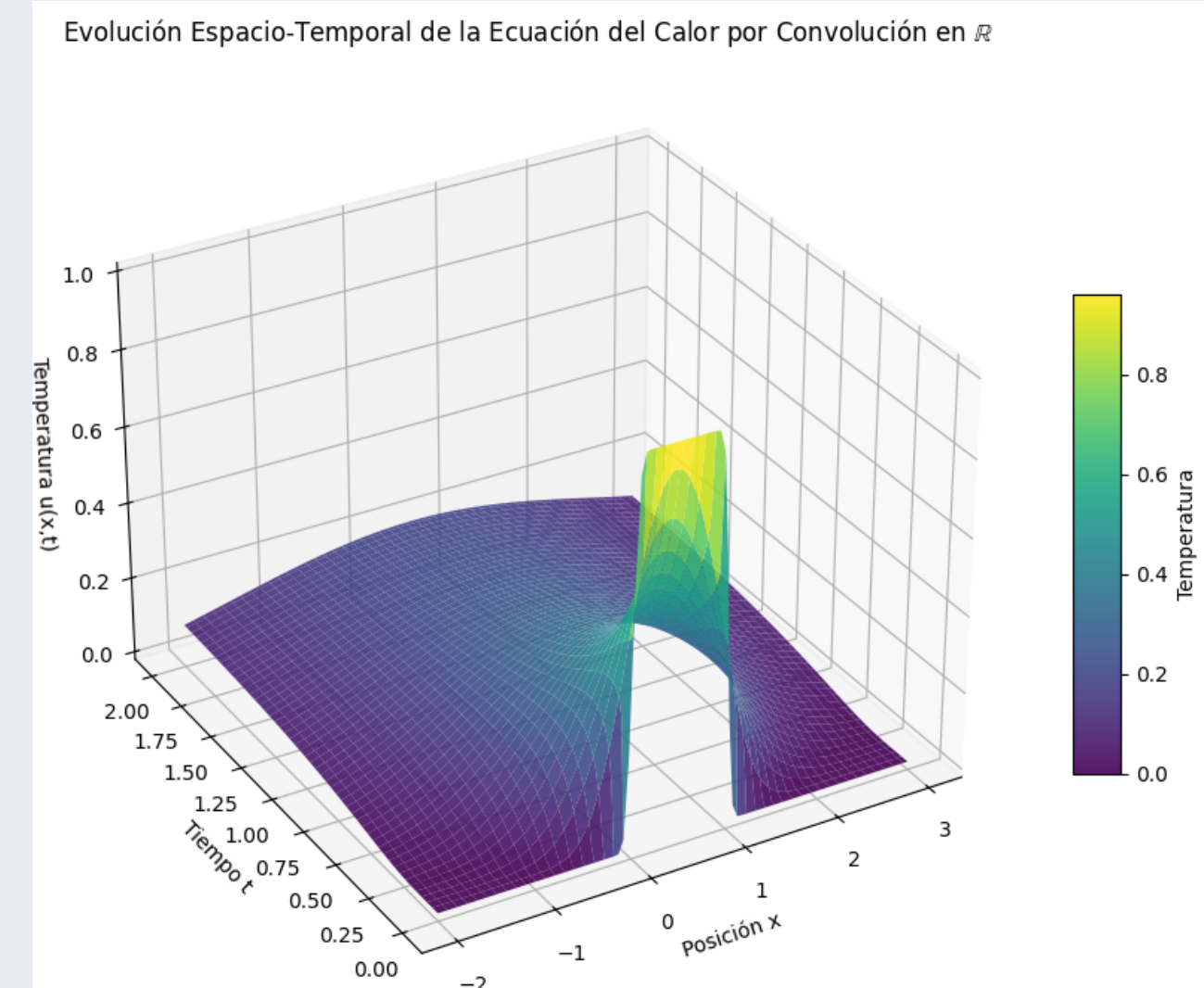
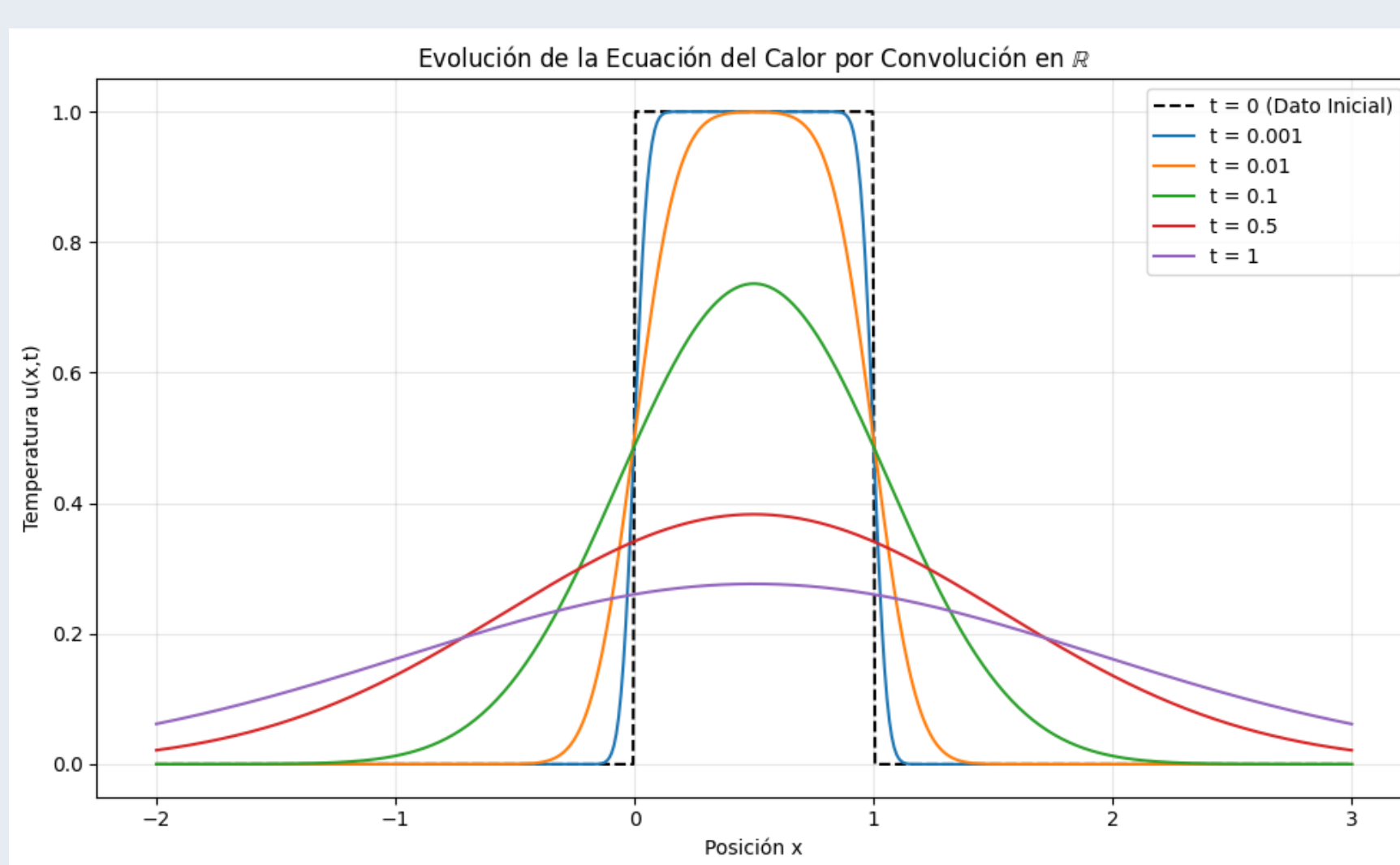
Principio del máximo global

Físicamente, este principio establece una propiedad fundamental de la termodinámica: en ausencia de fuentes internas de calor, la temperatura máxima (y mínima) de un sistema se alcanza o bien en el instante inicial, o bien en las fronteras del dominio.

Análiticamente, en clase probamos que, dada una solución $u(x, t)$ de la ecuación de difusión en un dominio no acotado con un dato inicial acotado, se verifica que:

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)} u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, 0)$$

Observemos cómo nuestra solución por convolución ilustra perfectamente este resultado. En las gráficas, resulta evidente que la temperatura máxima decrece monótonamente conforme avanza el tiempo, la curva para cualquier $t > 0$ nunca supera el máximo de la curva en $t = 0$. A su vez podemos visualizar de manera clara la capacidad suavizadora de la convolución.



Principio fuerte del máximo

Existe una versión aún más potente (el principio fuerte). Este teorema establece que si el dominio espacial es conexo (como es el caso de \mathbb{R}) y la solución alcanza su máximo absoluto M en un punto interior (x_0, t_0) con $t_0 > 0$, entonces la solución tiene que ser idénticamente constante en todas partes y en todo tiempo anterior $t \leq t_0$.

Desde un punto de vista físico, esto significa que si hubiera un pico de temperatura máxima en un instante posterior al inicial, el calor debería haber fluido hacia ese punto desde zonas más frías, lo cual viola el segundo principio de la termodinámica. Por tanto, la única forma de que se alcance el máximo en el interior del dominio es que el sistema ya estuviera en equilibrio térmico (temperatura constante) desde el principio.

Comportamiento de las soluciones según el dominio

A continuación estudiamos la diferencia en el comportamiento a lo largo del tiempo de la solución por convolución en \mathbb{R} respecto a la solución clásica de la ecuación del calor en una barra de longitud 1 con condiciones Dirichlet nulas, que en función de sus coeficientes de Fourier es

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k \pi x) \quad (1)$$

Análiticamente, las velocidades divergen radicalmente dependiendo de la topología del dominio:

- **Dominio acotado** ($[0, 1]$): En este caso, la solución se expresa mediante su serie de Fourier:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k \pi x)$$

El decaimiento está dominado por el primer armónico ($k = 1$). Aplicando la identidad de Parseval, podemos acotar la norma L^2 de la solución en cualquier instante t :

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2k^2 \pi^2 t} \leq e^{-2\pi^2 t} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right) = e^{-2\pi^2 t} \|w_0\|_{L^2}^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada, obtenemos que $\|w(\cdot, t)\|_{L^2} \leq e^{-\pi^2 t} \|w_0\|_{L^2}$. Un argumento análogo sobre la suma de los valores absolutos demuestra que en norma infinito el comportamiento es idéntico: el decaimiento es de orden $\mathcal{O}(e^{-\pi^2 t})$.

- **Dominio no acotado** (\mathbb{R}): Para la solución por convolución $u(x, t) = (K * u_0)(x, t)$, suponemos un dato inicial absolutamente integrable ($u_0 \in L^1(\mathbb{R})$). En norma infinito, podemos acotar directamente sacando el supremo del núcleo del calor:

$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) |u_0(y)| dy \leq \|K(\cdot, t)\|_{\infty} \|u_0\|_{L^1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u_0\|_{L^1}$$

Esto demuestra el decaimiento $\mathcal{O}(t^{-1/2})$. Por otro lado, para la norma L^2 , aplicamos la Desigualdad de Young ($\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$):

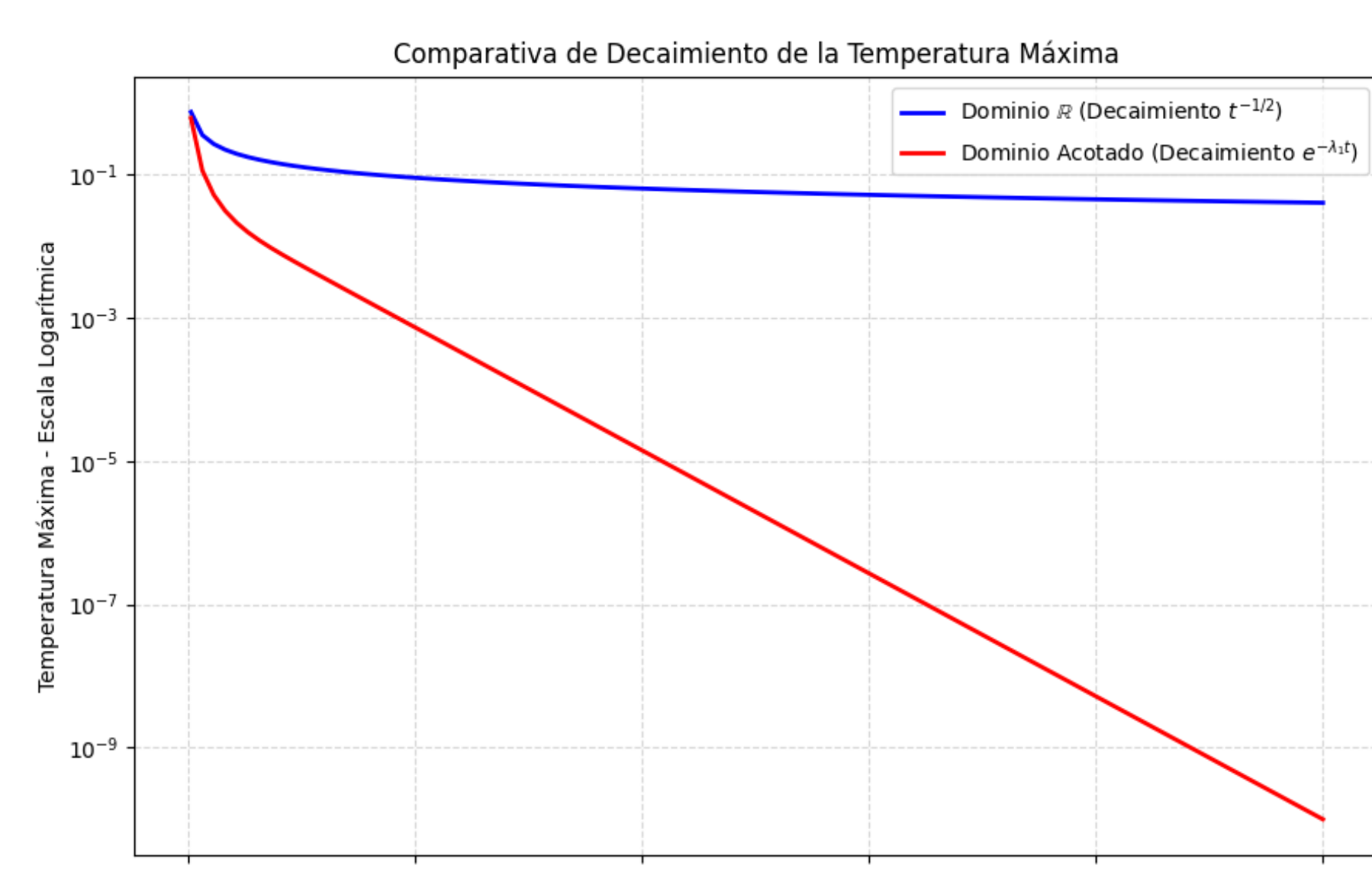
$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|K(\cdot, t)\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}$$

Calculando explícitamente la norma L^2 de la gaussiana:

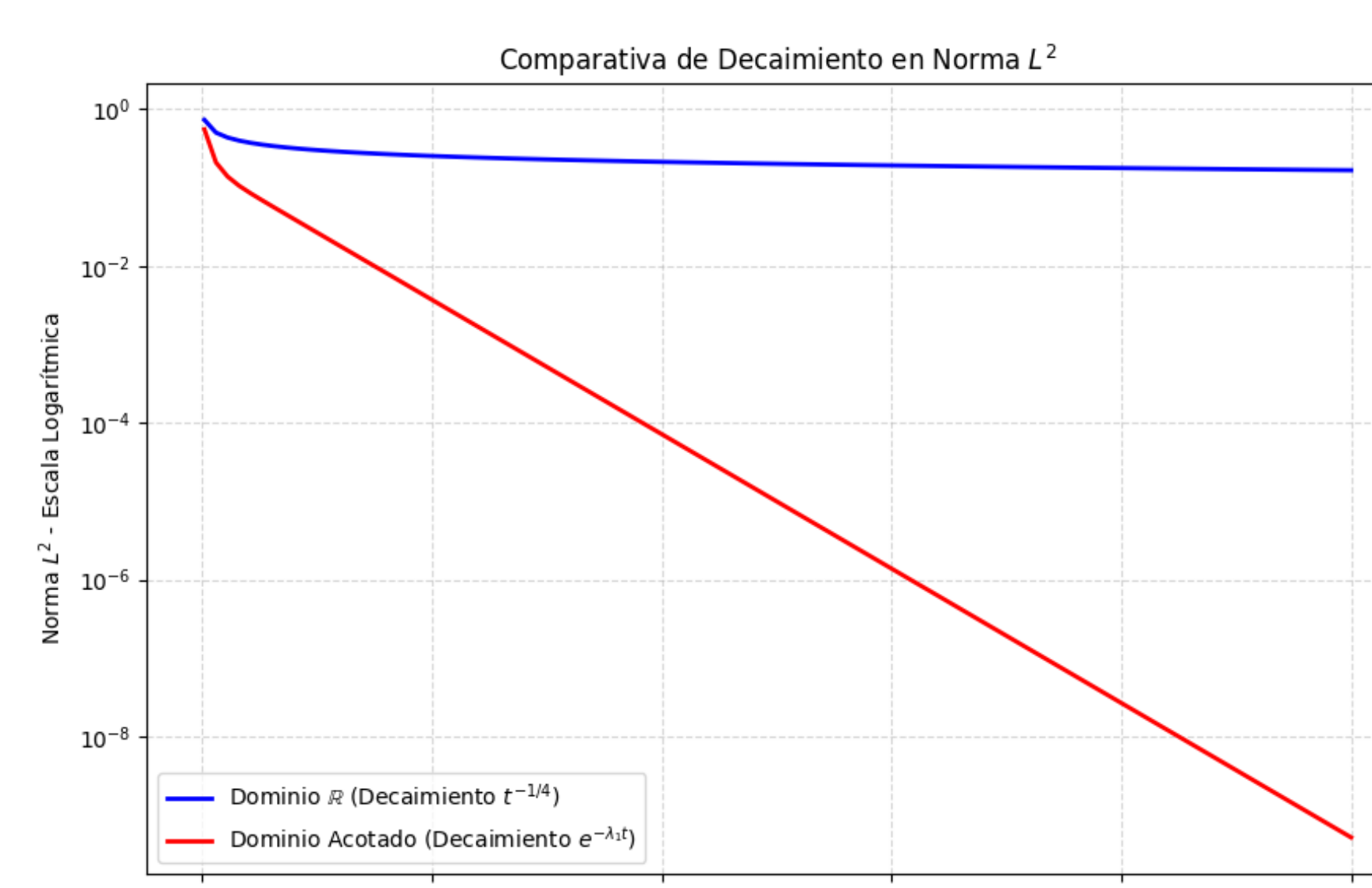
$$\|K(\cdot, t)\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{4\pi t} \sqrt{2\pi t} \right)^{1/2} = (8\pi t)^{-1/4}$$

Por lo tanto, concluimos que $\|u(\cdot, t)\|_{L^2} = \mathcal{O}(t^{-1/4})$, un decaimiento notablemente más lento.

Si comparamos gráficamente cómo evolucionan en tiempo ambas soluciones tanto en norma infinito como en norma L^2 , observamos como ha quedado evidenciado por el desarrollo analítico que en el caso acotado la solución decae mucho más rápido:



Evolución en norma infinito



Evolución en norma L2

Esta diferencia analítica refleja un principio físico fundamental: en un dominio infinito (\mathbb{R}), la energía térmica se conserva globalmente y solo se dispersa a lo largo del espacio. Sin embargo, en un dominio acotado con condiciones nulas en la frontera, los extremos actúan como sumideros de calor, permitiendo que la energía abandone el sistema a un ritmo exponencial.

Generalización analítica en \mathbb{R}^n

El problema de Cauchy para la ecuación del calor en múltiples dimensiones espaciales se formula como:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dado que el operador laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ es separable, podemos construir la solución fundamental multidimensional $K_n(\mathbf{x}, t)$ como el producto de n soluciones fundamentales unidimensionales. Para un vector de posición $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, obtenemos:

$$K_n(\mathbf{x}, t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \right) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}} \quad (2)$$

De forma análoga al caso unidimensional, la solución general del problema se obtiene mediante la integral de convolución en todo el espacio: $u(\mathbf{x}, t) = (K_n * u_0)(\mathbf{x}, t)$.

Si el dato inicial es integrable ($u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$), podemos establecer analíticamente cómo la dimensión del espacio afecta a la velocidad de enfriamiento. En norma infinito, acotamos la convolución directamente por el máximo global del núcleo:

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \|K_n(\cdot, t)\|_{\infty} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (3)$$

Esto demuestra que el decaimiento máximo es del orden $\mathcal{O}(t^{-n/2})$. Para estudiar la energía térmica total (norma L^2), aplicamos nuevamente la Desigualdad de Young para convoluciones, para lo cual calculamos la norma L^2 del núcleo multidimensional:

$$\|K_n(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}} d\mathbf{x} \right)^{1/2} = \left(\frac{(2\pi t)^{n/2}}{(4\pi t)^n} \right)^{1/2} = (8\pi t)^{-n/4} \quad (4)$$

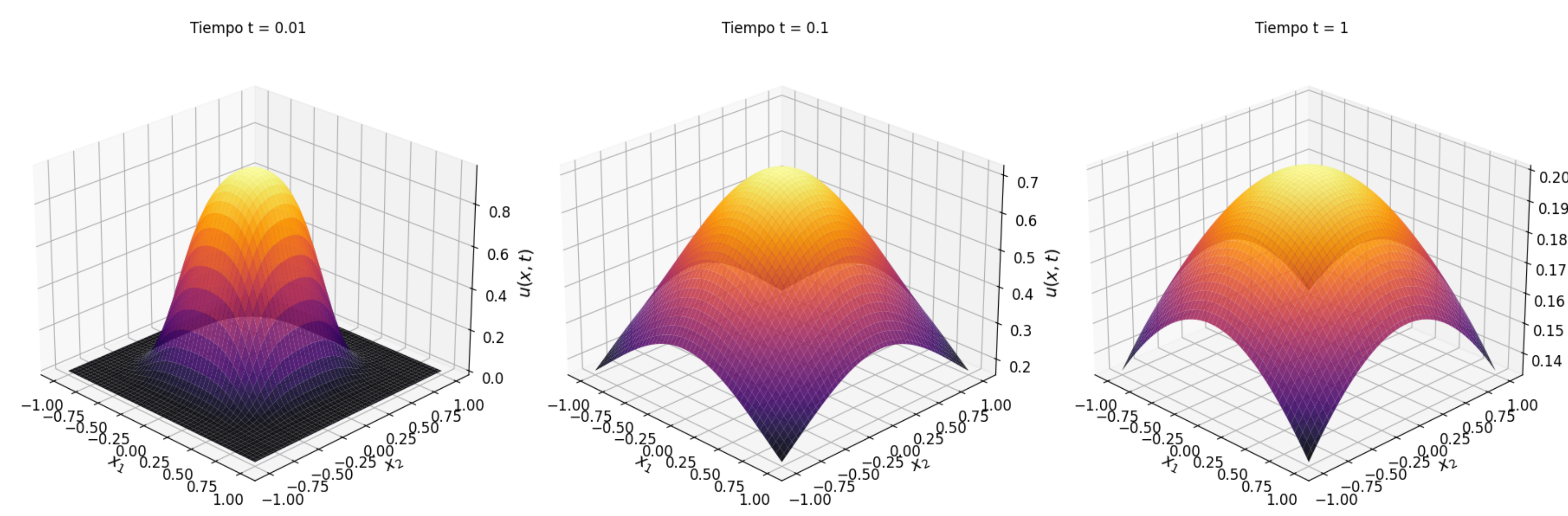
Por consiguiente, obtenemos la cota $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq (8\pi t)^{-n/4} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(t^{-n/4})$.

Físicamente, este resultado revela que a mayor dimensión espacial n , la energía se dispersa mucho más rápido. Al disponer de más direcciones ortogonales, el calor fluye hacia el infinito con mayor velocidad.

El caso particular bidimensional

Restringimos nuestro análisis al plano ($n = 2$), ilustramos el comportamiento con las siguientes gráficas que resuelven el problema para el valor inicial $u_0(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

Solución por Convolución de la Ecuación del Calor en \mathbb{R}^2



Visualmente, al arrancar en un tiempo muy cercano al inicial, la energía térmica se halla altamente concentrada alrededor del origen, donde la temperatura es máxima. En este instante inicial la solución alcanza su supremo absoluto, validando una vez más el principio del máximo global.

Conforme transcurre el tiempo, el núcleo del calor actúa expandiendo la distribución radicalmente y achatando la campana bidimensional. El hecho de que este decaimiento sea veloz ilustra la dependencia de la velocidad de propagación y enfriamiento con la dimensión espacial n deducida anteriormente. Además, la gráfica evidencia que no se viola el principio fuerte del máximo, pues ningún máximo relativo posterior supera al pico inicial absoluto.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos analizado la ecuación del calor en dominios no acotados mediante su solución por integral de convolución. Analíticamente, hemos justificado propiedades del núcleo del calor, como el efecto regularizador instantáneo sobre el dato inicial y la velocidad infinita de propagación, verificando a su vez el cumplimiento del principio del máximo global y fuerte.

Además, la comparativa con el problema acotado unidimensional nos ha permitido cuantificar cómo la topología del dominio domina la dispersión de la energía, mientras las fronteras de un dominio cerrado fuerzan un decaimiento térmico de orden exponencial, el espacio libre en \mathbb{R} presenta un enfriamiento polinomial. Finalmente, la generalización analítica a \mathbb{R}^n ha revelado teóricamente que la disipación térmica se acelera a medida que aumentan las dimensiones espaciales, y mediante la simulación del caso bidimensional hemos podido constatar visualmente que las propiedades fundamentales del sistema estudiadas en una dimensión se mantienen inalteradas.

Bibliografía

- [1] Zuazua, E. *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad Autónoma de Madrid. https://verso.mat.uam.es/web/ezuazua/documentos_public/archivos/personal/comites/1_ecudepa.pdf
- [2] Milonga, M. (2020). *La ecuación del Calor* [Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Murcia]. https://webs.um.es/gustavo.garrigos/tfg/Milonga_TFG_sept2020.pdf
- [3] Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations* (2nd ed.). American Mathematical Society.