

Fenómeno de Gibbs y Métodos de Suavizado

Rodrigo Gallardo, Alejandro Cogollor y Javier Martín

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior | Universidad Politécnica de Madrid



POLITÉCNICA

Introducción

Las series de Fourier permiten aproximar funciones en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$, típicamente estando formadas por combinaciones de funciones trigonométricas. Sin embargo, cuando la función es discontinua, la convergencia en los puntos de salto no es uniforme, produciéndose unas oscilaciones conocidas como el fenómeno de Gibbs.

Para mitigar este efecto, se introducen técnicas como las sumas de Cesàro, Abel o Lanczos, procedimientos que nos permiten suavizar las oscilaciones y mejorar la estabilidad de la aproximación.

En este trabajo analizaremos este fenómeno y las formas de mitigarlo aplicando las técnicas descritas anteriormente a la función característica del intervalo $[0, 1/4]$. Extenderemos dicha función de forma par al intervalo $[-1, 1]$ y realizaremos un estudio numérico comparativo del error y la convergencia en función del número de términos N .

Aproximación inicial por serie de Fourier

Como introdujimos anteriormente, para ilustrar este tipo de problema con las funciones discontinuas, trabajaremos con la extensión par de la función $\mathbf{1}_{[0,1/4]}(x)$, obteniendo la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1/4, 1/4] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1/4, 1/4] \end{cases}, \quad x \in [-1, 1] \quad (1)$$

Al ser una función par, sabemos que su desarrollo en serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \quad (2)$$

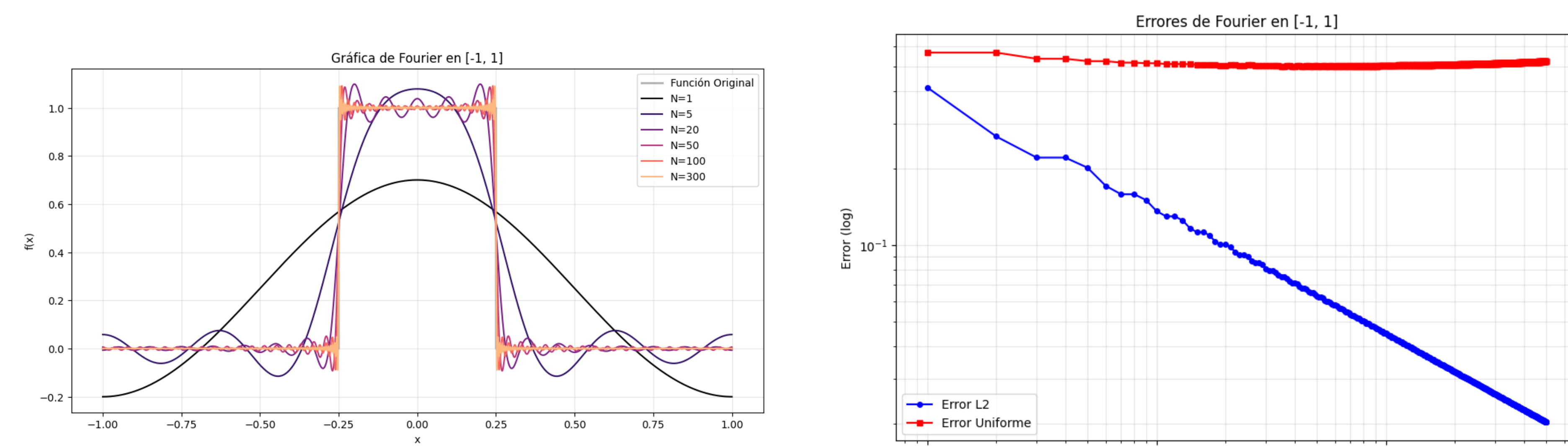
ya que trabajaremos con la base trigonométrica en $L^2(-1, 1)$. Las integrales que dan lugar a los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2} dx, \quad a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cdot \cos(n\pi x) dx \quad (3)$$

Resolveremos estas integrales numéricamente utilizando la regla del trapecio con una discretización espacial de 10^{-4} .

Gráficas de la estimación por serie de Fourier

En las siguientes gráficas mostramos como va evolucionando la serie de Fourier y sus errores (en norma L^2 y uniforme) en función del valor de n :



En la primera gráfica se puede observar que la serie de Fourier va mejorando su aproximación en $[-1, 1] \setminus \{1/4, -1/4\}$ conforme aumenta el valor de n , llegando a ser la serie muy similar a la función aunque sin perder el carácter oscilatorio propio de la serie de Fourier. En cambio, en los puntos donde la función no es continua, esta aproximación no es buena, pese a aumentar el número de términos observamos que la magnitud de la oscilación se mantiene prácticamente constante, se da el fenómeno de Gibbs.

En la segunda gráfica podemos observar los dos tipos de errores antes nombrados, como cabría esperar, el error en la norma L^2 va disminuyendo conforme aumenta el n , lo cual es coherente con que la serie de Fourier converge a la función que aproxima en el espacio L^2 . Al contrario, el error uniforme no decrece, teniendo esto sentido ya que la serie de Fourier es una suma de funciones continuas, y como sabemos si una serie de funciones continuas converge uniformemente a una función, esto implica que la función es continua, por lo que nuestra serie no puede converger uniformemente al estar aproximando una función discontinua.

A partir de ahora vamos a ir mostrando diferentes métodos que tienen como objetivo mitigar el fenómeno de Gibbs, siendo los dos primeros métodos generales de sumación de series divergentes y el último un método desarrollado específicamente para reducir este fenómeno:

Sumabilidad de Cesàro

Sea $\{a_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión y sea s_k la k -ésima suma parcial de los primeros k términos de la serie, definida como:

$$s_k = a_0 + \dots + a_k = \sum_{j=0}^k a_j \quad (4)$$

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable Cesàro, con una suma de Cesàro α , si el límite de las medias aritméticas de las sumas parciales converge a α , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1} = \alpha \quad (5)$$

Aplicación de las sumas de Cesàro

Para mitigar el fenómeno de Gibbs, utilizaremos la sumación de Cesàro definida anteriormente. La aplicación de este método consiste en promediar las primeras $N+1$ sumas parciales de la serie de Fourier $f_n(x)$:

$$S_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f_n(x) \quad (6)$$

Sustituyendo por la serie de Fourier de nuestra función y reorganizando los sumatorios, llegamos a

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\pi x)) \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{|n| \leq k} \quad (7)$$

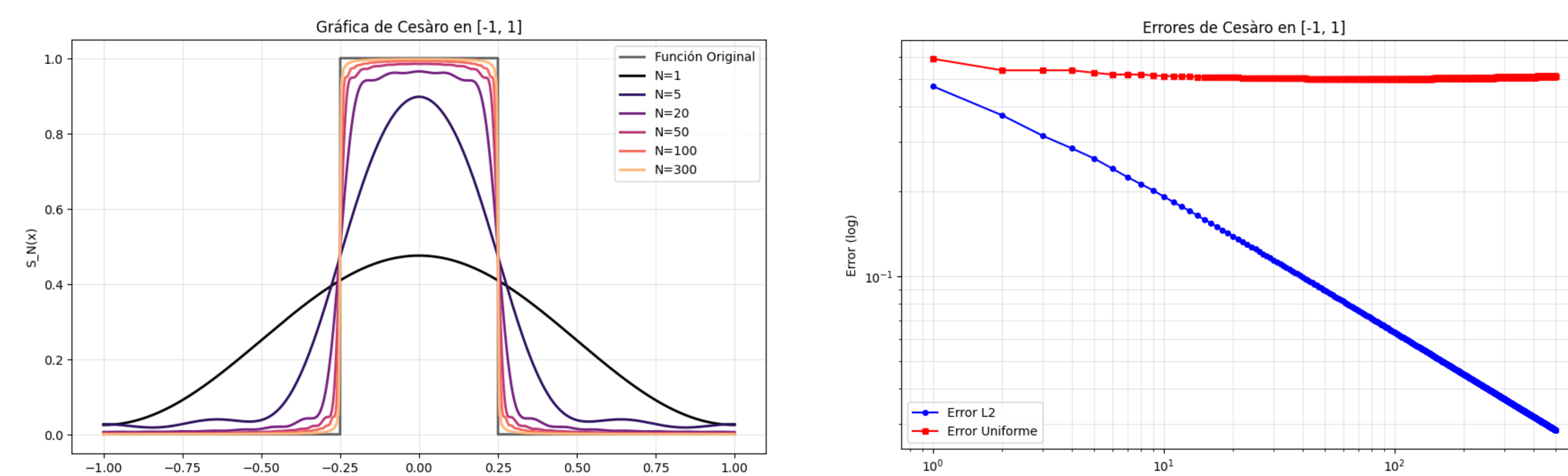
que sacando factor común resulta en

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{N-k+1}{N+1} \right) a_k \cos(k\pi x) \quad (8)$$

El factor entre paréntesis, conocido como núcleo de Fejér, provoca que para frecuencias bajas (k pequeño), este sea cercano a 1, es decir ese término es prácticamente el mismo al de la serie original. En cambio, a medida que k se acerca a N , el factor tiende a 0, reduciendo la influencia de las altas frecuencias responsables de la oscilación excesiva.

Gráficas de la estimación por sumas de Cesàro

En las siguientes gráficas mostramos como van evolucionando las sumas de Cesàro y sus errores (en norma L^2 y uniforme) en función del valor de n :



En la primera gráfica podemos observar cómo conforme aumenta n nos vamos acercando cada vez más a la función, en este caso es evidente que no sufrimos el fenómeno de Gibbs, aunque esta mitigación produce que cerca del punto de discontinuidad la curva no se amolde bien a los picos, sobrestimando el valor donde este debería ser 0 y subestimando cuando debería ser 1. También se puede observar que se ha perdido la componente oscilatoria tan marcada que nos daba la serie de Fourier.

En la segunda gráfica podemos observar como el carácter de ambos errores es el mismo que en el caso de la serie de Fourier, siendo las razones del comportamiento de cada error las mismas que en dicho caso. La única ligera diferencia observada es que la caída del error en la norma L^2 es más estable, lo cual achacamos a la menor oscilación de las sumas de Cesàro.

Sumabilidad de Abel

Dada una serie numérica infinita $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, decimos que es sumable según Abel si la serie de potencias asociada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \quad (9)$$

converge para $0 \leq r < 1$ y existe el siguiente límite:

$$L = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \quad (10)$$

Si este límite existe, L se denomina la suma de Abel de la serie.

Aplicación de las sumas de Abel

Trasladando este concepto a nuestro problema, consideramos la serie de Fourier de $f(x)$. Para aplicar el método, introducimos el factor de amortiguamiento r^n en cada término n -ésimo de la serie.

Definimos la media de Abel $A_r f(x)$ para $r \in (0, 1)$ como:

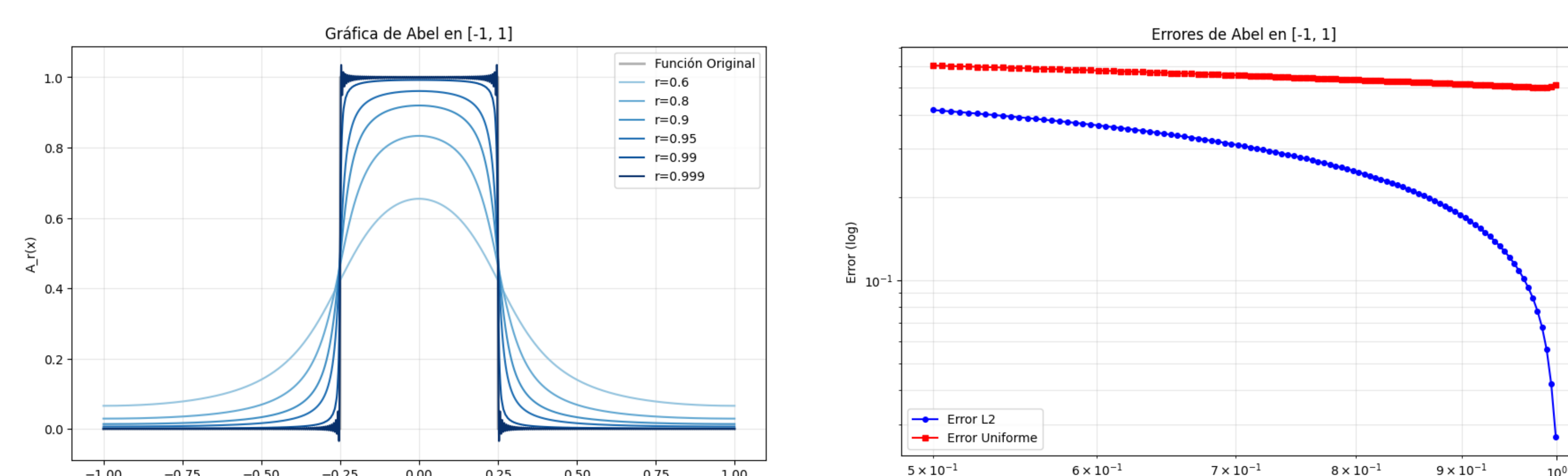
$$A_r f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n \cos(n\pi x) \quad (11)$$

Al igual que con las sumas de Cesàro, este método busca suavizar las oscilaciones de Gibbs, pero el mecanismo es distinto. Introducimos un factor r^n (con $r < 1$) que decae exponencialmente conforme aumenta n . Esto provoca que los términos de alta frecuencia (los n grandes) tengan una influencia mucho menor que los primeros.

Físicamente, este método es equivalente a tomar un disco de radio 1 donde la temperatura en el borde viene dada por nuestra función $f(x)$ (discontinua). La media de Abel $A_r f(x)$ representa cómo se difunde la temperatura hacia el interior del disco, el calor se propaga suavemente desde el borde hacia el centro, eliminando las discontinuidades en el interior.

Gráficas de la estimación por sumas de Abel

En las siguientes gráficas mostramos como va evolucionando las sumas de Abel y sus errores (en norma L^2 y uniforme) en función del valor de r (ya que en este método el valor de n es fijo):



La primera gráfica nos muestra que con $r \leq 0.99$ el comportamiento es muy similar al de las sumas de Cesàro con oscilaciones incluso menos pronunciadas. Conforme aumentamos el valor de r hasta 0.999 nuestra suma se parece mucho más a la serie de Fourier con $n = 300$, como cabría esperar, ya que el factor exponencial al ser nuestro r más cercano a 1 decae más lentamente. Pese a ello, observamos que las oscilaciones del fenómeno de Gibbs son menos agresivas.

En la segunda gráfica, el error uniforme conforme aumentamos r no decrece prácticamente, por la misma razón que dimos en los dos casos anteriores. Esta vez la diferencia es que el error en la norma L^2 , aunque también tiende a 0, lo hace de manera exponencial conforme aumenta r , como se podría llegar a esperar ya que poco a poco se acerca más a la serie de Fourier conforme aumenta r , el cuál decae exponencialmente en la serie.

Método de Lanczos

Sea f una función en $L^2(-1, 1)$ y consideramos la suma parcial de su serie de Fourier de orden n , denotada por S_n . El método de Lanczos define la suma modificada de orden n como:

$$S_n^{(\sigma)} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \sigma_{n,k} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)),$$

donde los factores σ son:

$$\sigma_{n,k} = \frac{(n+1) \sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}{\pi k} = \text{sinc}\left(\frac{\pi k}{n+1}\right).$$

Se dice que la serie es sumable por el método de Lanczos en el punto x si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(\sigma)} f(x)$$

existe.

Intuición del método de Lanczos

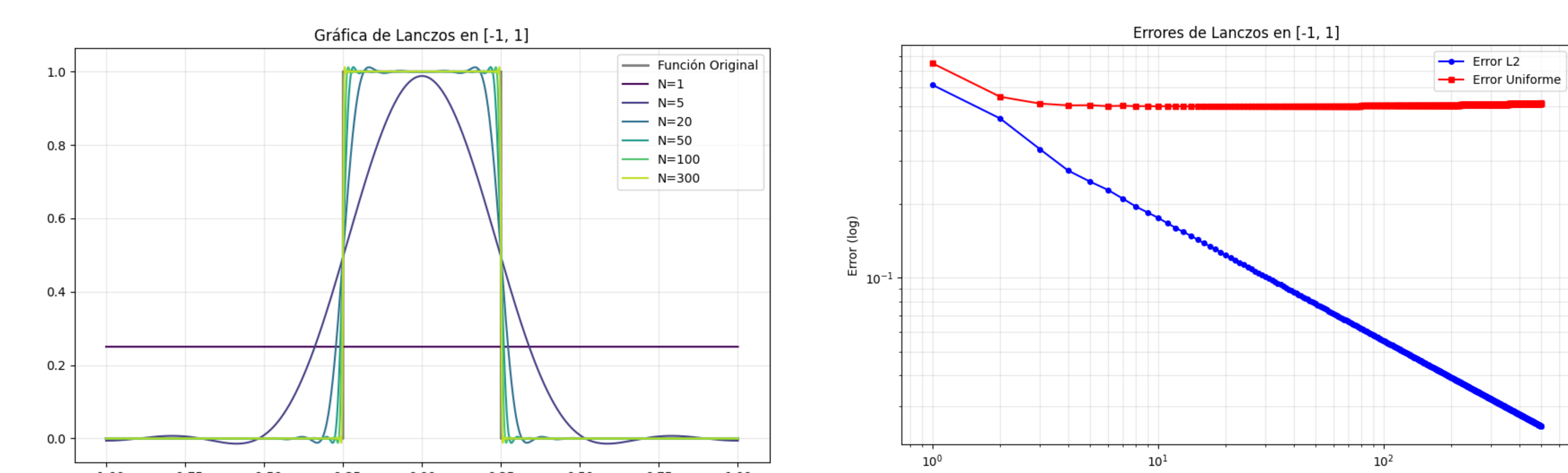
A diferencia de los métodos de Cesàro y Abel, que son definiciones generales de sumabilidad para series divergentes, el método de Lanczos es una técnica de filtrado diseñada específicamente para las series de Fourier.

La intuición se basa en corregir el corte abrupto de la serie, que es la causa del fenómeno de Gibbs. El objetivo es encontrar un equilibrio, mitigar las oscilaciones sin suavizar la función de manera tan drástica como ocurre con Cesàro o Abel, donde se pierde la nitidez del salto.

Para lograr esto, el método aplica los llamados factores σ , que atenúan las frecuencias altas de forma progresiva en lugar de eliminarlas o promediarlas excesivamente. Esto permite mantener una transición más rápida en las discontinuidades mientras se reducen las oscilaciones.

Gráficas de la estimación por el método de Lanczos

En las siguientes gráficas mostramos como va evolucionando el método de Lanczos y sus errores (en norma L^2 y uniforme) en función del valor de n :



En la primera gráfica podemos observar como este método es el que más se asemeja visualmente a la serie de Fourier, consiguiendo reducir sus oscilaciones y el fenómeno de Gibbs con gran eficacia. Pese a ello sigue dejando una ligera oscilación, siendo más visible cerca de los puntos de discontinuidad.

En la segunda gráfica se observa como el error uniforme se comporta como cabría esperar, mientras el error en la norma L^2 decae a 0, haciéndolo con una estabilidad intermedia entre Cesàro y Fourier.

Conclusiones

En conclusión, este trabajo ha permitido ilustrar las limitaciones de la serie de Fourier clásica en presencia de discontinuidades, mostrando la existencia del fenómeno de Gibbs independientemente del número de términos.

El estudio comparativo de los métodos de sumabilidad (Cesàro, Abel y Lanczos) ha demostrado su eficacia para mitigar dichas oscilaciones, transformando nuestra serie en una aproximación suave y estable. Sin embargo, la eliminación de Gibbs conlleva una menor brusquedad en los saltos. Asimismo, hemos constatado que, aunque el error en norma L^2 disminuye consistentemente, el error uniforme no converge a cero, mostrando empíricamente que no es posible aproximar uniformemente una función discontinua mediante funciones continuas.

Bibliografía

- [1] Wikipedia. *Fenómeno de Gibbs*. https://es.wikipedia.org/wiki/Fen%C3%B3meno_de_Gibbs
- [2] Wikipedia. *Sumación de Cesàro*. https://es.wikipedia.org/wiki/Sumaci%C3%B3n_de_Ces%C3%A0ro
- [3] Wikipedia. *Serie divergente: Promedio abeliano*. https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_divergente
- [4] Wikipedia. *Aproximación sigma*. https://es.wikipedia.org/wiki/Aproximaci%C3%B3n_sigma