DERIVADA E INTEGRAL DE UNA SERIE DE FOURIER

Adrián Nieto, Mario Alonso, Matías Martínez

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Motivación

Hemos visto durante la carrera que las sumas infinitas no siempre se comportan como esperamos, al ser las series de Fourier una de ellas, queremos estudiar en este trabajo si para derivar o integrar estas series necesitamos, condiciones adicionales, para que se comporten como se espera, como se necesita las convergencia absoluta en las series reales para que se cumple la propiedad asociativa.

Funciones que estudiaremos

Estudiaremos la función signo en el intervalo $(-\pi, \pi)$, considerada como elemento del espacio $L^2(-\pi,\pi)$. Esta función presenta una discontinuidad en $x = 0$, lo que implica que:

- No es continua.
- No es derivable en sentido clásico.

Esta falta de regularidad la convierte en un ejemplo especialmente interesante para analizar:

- Si es válido derivar término a término su serie de Fourier.
- Cómo cambia la convergencia al integrar la serie.
- Qué relación existe entre regularidad y velocidad de convergencia.

La función signo

Definimos la función signo en $(-\pi, \pi)$ como:

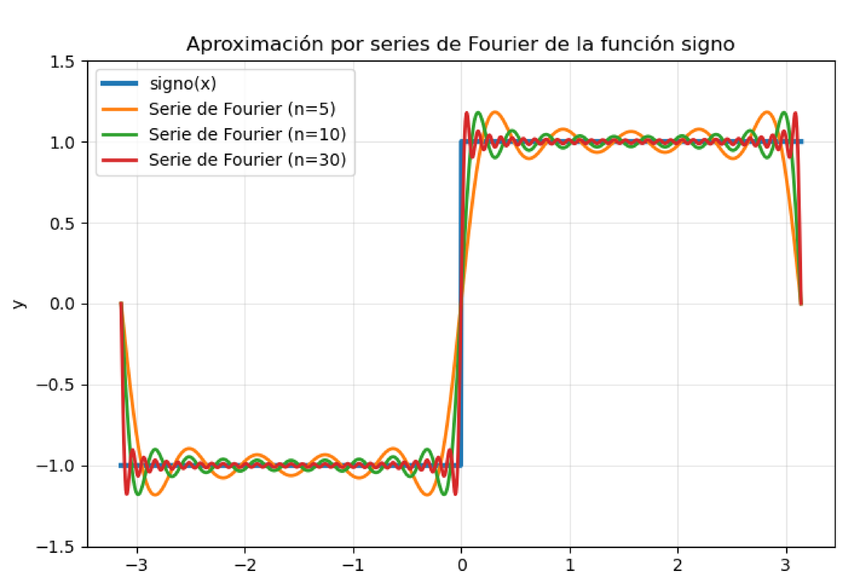
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

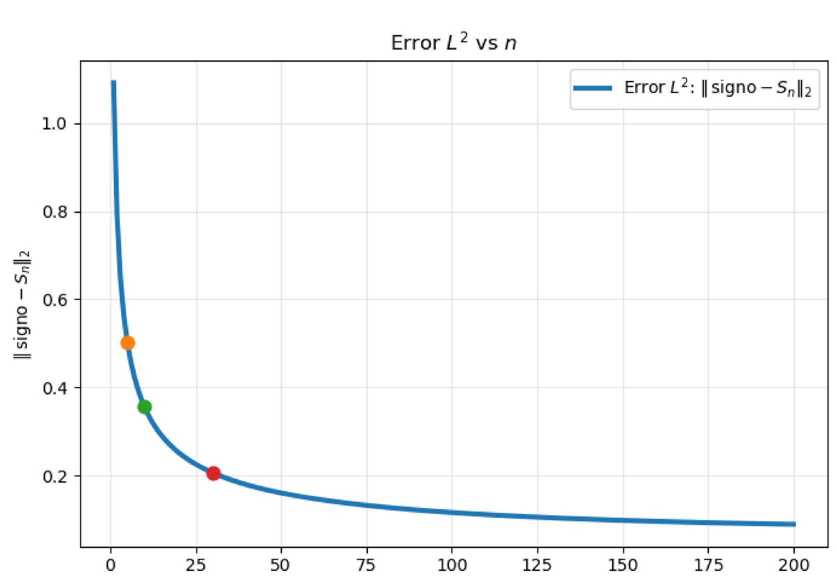
Se trata de una función discontinua en $x = 0$, perteneciente al espacio $L^2(-\pi,\pi)$.

Su serie de Fourier viene dada por:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Dibujandolas a ellas y su error obtenemos:





Además los coeficientes de Fourier decaen como $\frac{1}{n}$, lo que refleja la baja regularidad de la función.

Este comportamiento anticipa que:

- La convergencia no es uniforme.
- La derivación término a término puede no estar justificada.
- La integración puede mejorar la convergencia.

Preliminares

Antes de estudiar su derivada e integral, veremos porque una función necesita cumplir los siguientes requisitos, para que se pueda derivar e integrar por su serie de Fourier. Esto no sera una demostración formal, sino una explicación intuitiva.

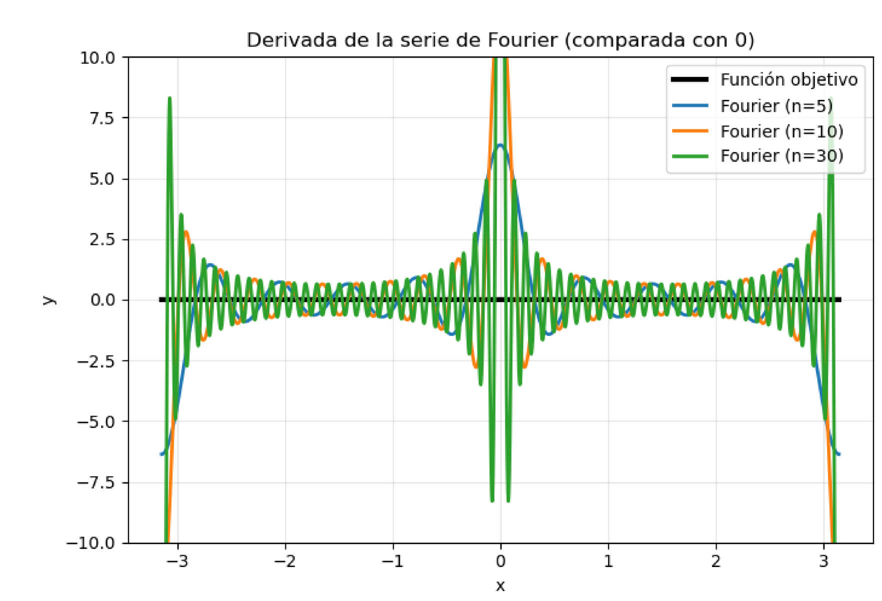
La derivada

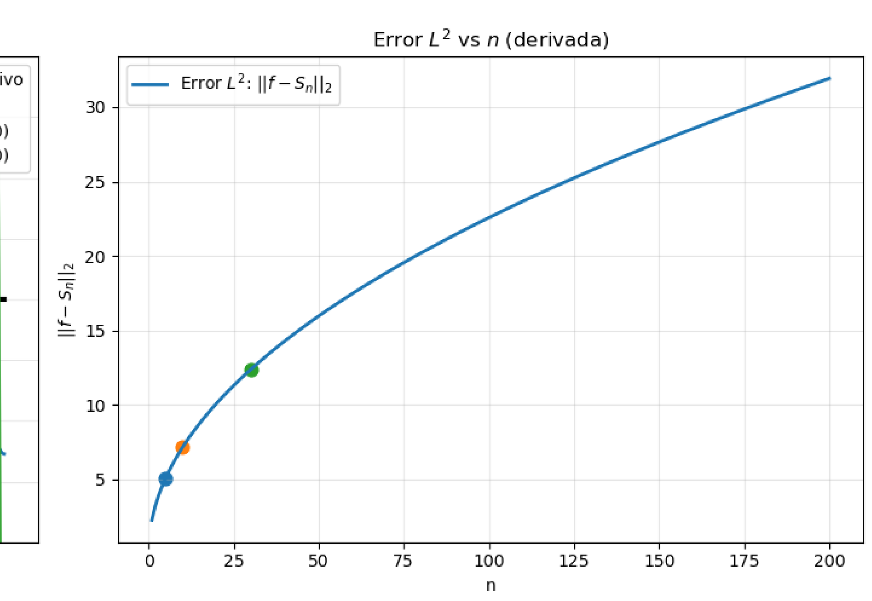
Ahora lo que queremos ver, es si la derivada de la serie de Fourier de una función es igual a la derivada de dicha función. Por lo general esto no es cierto, al menos que la función sea lo suficientemente regular.

Queremos ver cuando $f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx))$, siendo $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ la serie de Fourier de f.

Viendo la igualdad anterior vemos que la serie de Fourier de la derivada decae más lento por un factor de n, comparada con la de la función. Entonces si la serie de la función no decae lo suficientemente rápido ,$O(\frac{1}{n^3})$, por ejemplo, entonces su derivada decaera $O(\frac{1}{n^2})$.

Y como hemos visto en los preliminares





La integral

Integrando la función signo obtenemos la función valor absoluto

$$\int sgn(x)\,dx = |x| + c.$$

Integrando los respectivos términos de la serie:

$$\int \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}\,dx = -\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$