

La desigualdad de Harnack

Constituye una propiedad fundamental que cumplen todas las funciones armónicas positivas definidas en una bola de radio R en cualquier dimensión.



Figura 1. Carl Gustav Axel Harnack (1851 - 1888), matemático alemán y alumno de Félix Klein.

- Originalmente enunciada por Axel Harnack, posteriormente generalizada por otros autores para aplicarse a EDP de tipo elíptico y parabólico.
- Grigori Perelman empleó en 2002 una versión de la desigualdad de Harnack para resolver la conjetura de Poincaré, mediante el flujo de Ricci.

Formulación matemática

Sea $u(x) \geq 0$ armónica, definida en $B_R(x_0) \subseteq \mathbb{R}^d$ entonces:

$$\frac{R^{d-2}(R-r)}{(R+r)^{d-1}} \cdot u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{R^{d-2}(R+r)}{(R-r)^{d-1}} \cdot u(x_0)$$

para todo $x \in B_R(x_0)$, siendo $r = \|x - x_0\|$.

La desigualdad de Harnack estima una cota de la solución radial de la ecuación de Laplace en función del valor que toma en el centro de la bola $u(x_0)$. La cota superior diverge en $\partial B_R(x_0)$, mientras que la cota inferior converge a cero.

Desigualdad de Harnack en dimensiones superiores

Al aumentar la dimensión, se observa cómo la cota inferior disminuye, mientras que la cota superior aumenta.

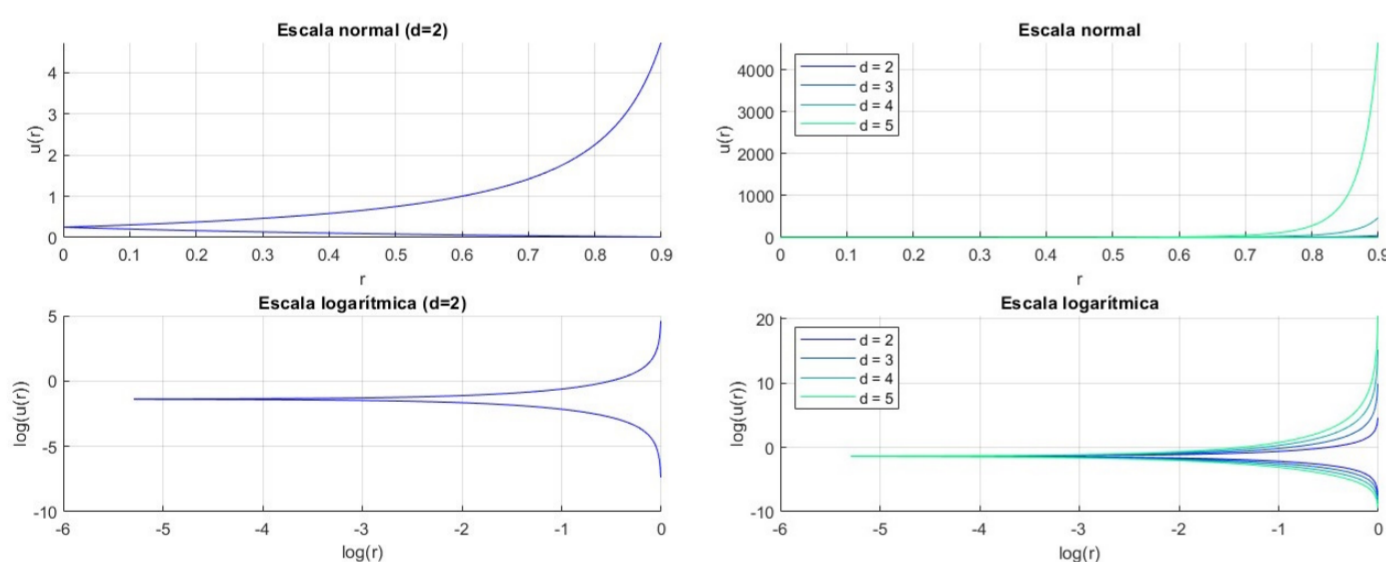


Figura 2. Desigualdad de Harnack en $d=2,3,4,5$. $R=1$.

Cuanto mayor es la dimensión, más difícil es estimar el valor de la solución conociendo únicamente su valor en el centro x_0 al alejarnos de él.

Tangibilidad de la cota de Harnack por soluciones

Estudiamos el caso $n = 2$ de la desigualdad de Harnack en la bola unidad, buscando una solución u del problema de Laplace que

- Alcance la cota superior de Harnack.
- Diverja en la frontera.
- Mantenga un valor finito y pequeño en el centro $u(0)$.

Esto trae **dificultad conceptual**. Por la propiedad del valor medio (PVM), $u(0)$ es el promedio de los valores sobre la frontera.

- Consecuencias: No es posible que u diverja en todas las direcciones y conserve un valor finito en el centro
- Alternativa: Diseñar una solución que diverja en un conjunto de medida nula en la frontera.

Estrategia de resolución

- Modelamos condiciones de frontera como normales gaussianas centradas en un punto del borde.
- Generamos una sucesión de soluciones del problema de Laplace disminuyendo la desviación estándar.
- En el límite, la 'solución' con condición frontera tipo delta se aproxima e incluso podría coincidir con la cota superior de Harnack en una dirección, aunque esta no es continua en la frontera y no es aplicable la fórmula de Poisson.

Esto garantiza $u(0) < +\infty$, ya que la integral del PVM "no ve" el punto de divergencia.

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} u(\sigma) d\sigma$$

Implementación computacional

Tomamos el radio máximo como $R = 0,9$ para evitar divergencias. Recordemos que la condición de frontera es una o varias normales gaussianas.

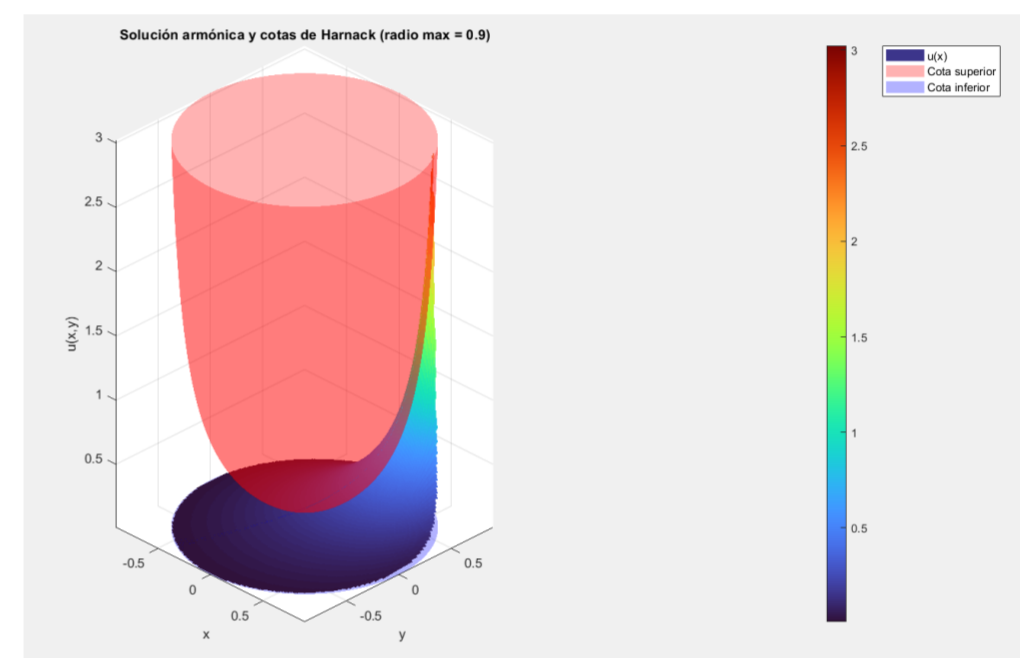


Figura 3. La solución respeta la cota de Harnack.

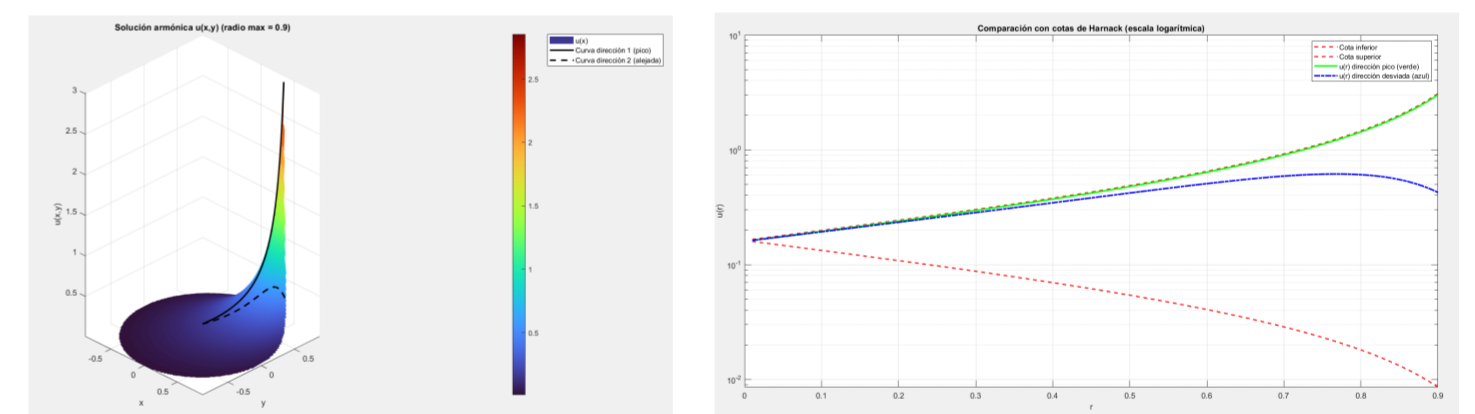


Figura 4. En la dirección del centro gaussiano se ajusta a la cota; en otras, no.

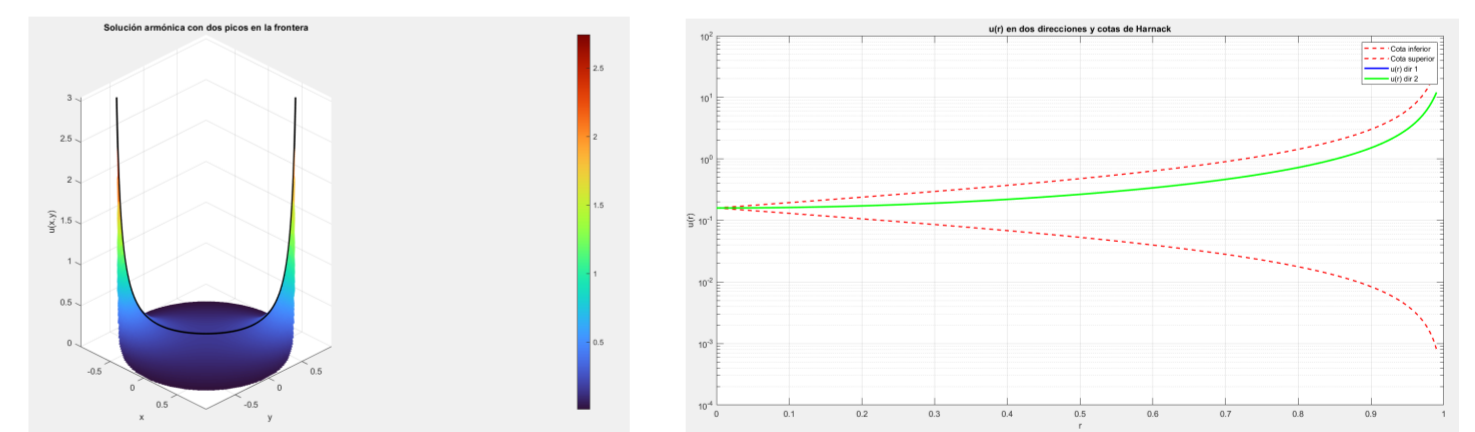


Figura 5. Esto se extiende a múltiples direcciones. Mejor aproximación con gaussianas más agudas (log-escala).

Conclusión

Es imposible lograr una divergencia uniforme en funciones armónicas sin afectar el centro, pero al controlar las direcciones de divergencia, se pueden construir funciones que diverjan en el borde y respeten la desigualdad de Harnack.

Referencias

- [1] Wikipedia, Desigualdad de Harnack (consultado el 15-04-2025)
- [2] Wikipedia, Carl Gustav Alex Harnack (consultado el 15-04-2025)