UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

La Catenaria (Grupo 62)

Rodrigo Avellaneda Ciruelos · Damián Díaz López · Víctor Esteban Jadraque
Antonio García Cabanillas · Carlos Puebla Díaz
Universidad Politécnica de Madrid — Teoría de Campos ETSICCP

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Introducción

La catenaria es la curva que describe un cable suspendido por sus extremos y sometido solo a su peso, cuya parametrización es:

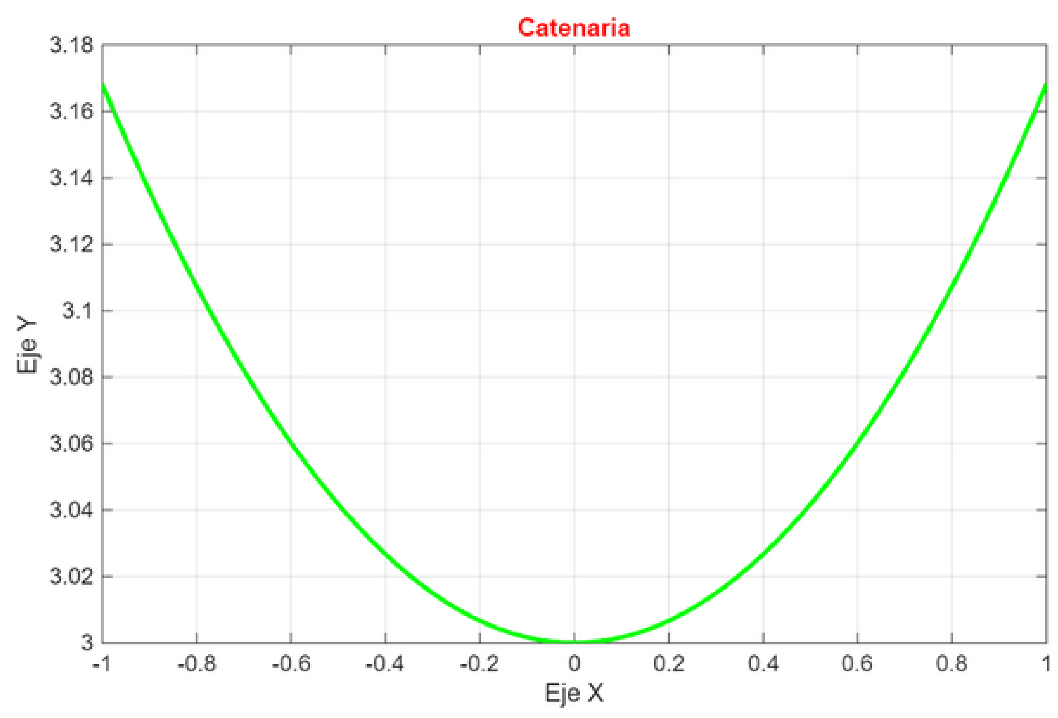
$$\gamma(t) = (t, A\cosh(t/A)), t \in (-1, 1),$$

Tiene gran importancia en ingeniería civil: puentes colgantes, arcos invertidos, líneas eléctricas, etc.

Parametrización y Curva

Para $A = 3$:

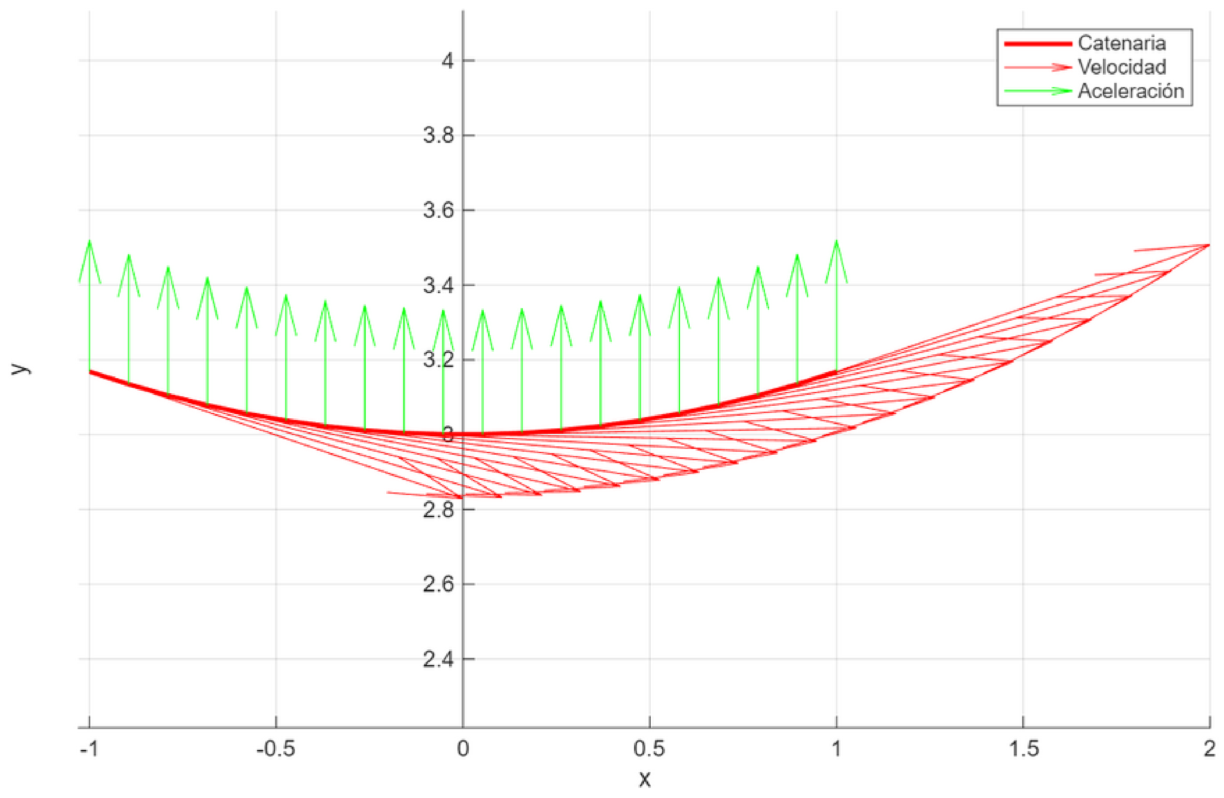
$$x(t) = t, \qquad y(t) = 3\cosh(t/3).$$



Vectores velocidad y aceleración

El vector velocidad describe la dirección que adopta la curva en un punto, mientras que la aceleración describe el cambio de magnitud y dirección del vector velocidad

$$\gamma'(t) = (1,\ senh(t/3)), \qquad \gamma''(t) = (0, \tfrac{1}{3}\cosh(t/3)).$$



Longitud de la Curva

La longitud de la catenaria se obtiene mediante:

$$L = \int_\gamma 1\, ds = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

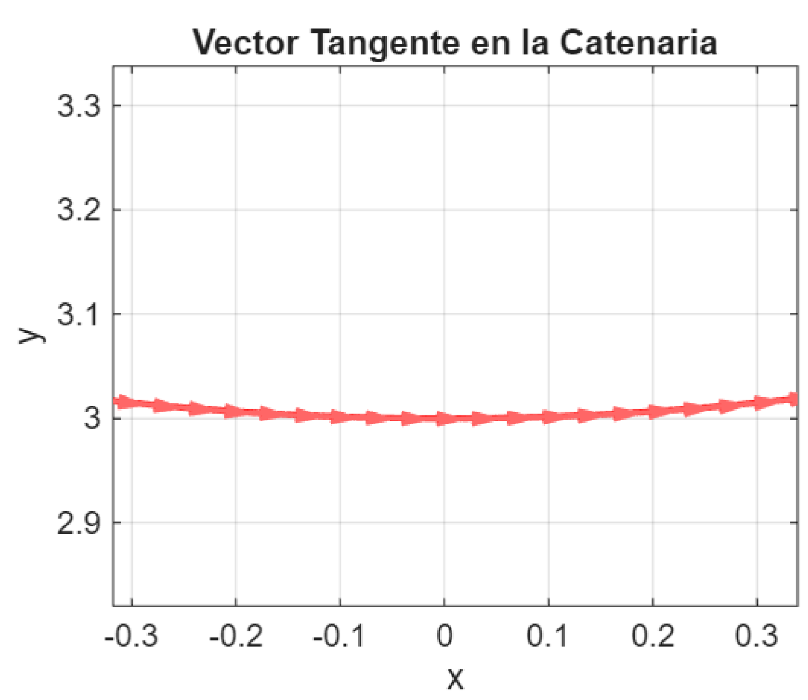
Con la parametrización dada, en el intervalo $t \in [-1, 1]$ la longitud dada:

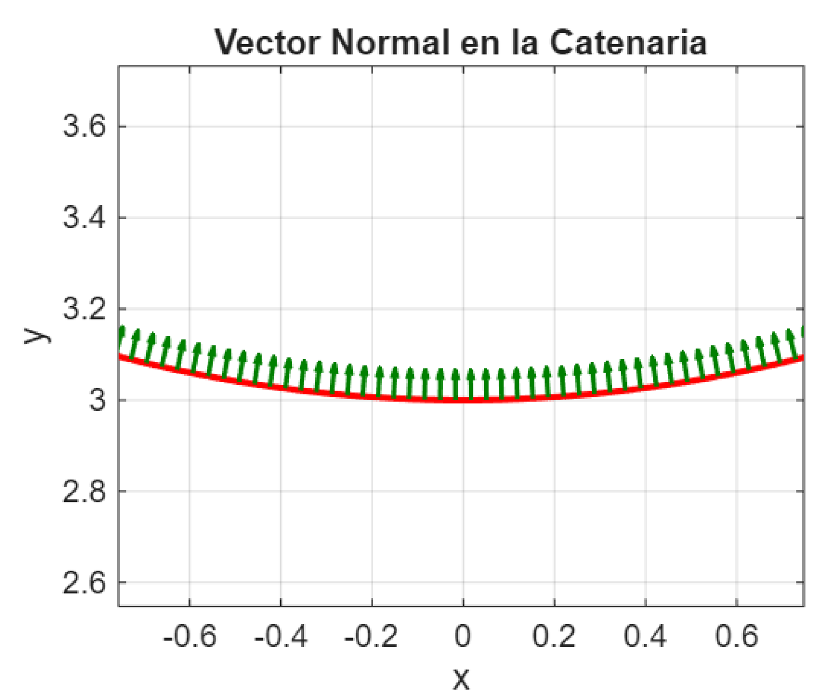
$$L = \int_{-1}^{1} \cosh\left(\tfrac{t}{3}\right) dt = 6\sinh\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 2.037.$$

Vector tangente y normal unificados

El vector tangente indica la dirección en la que avanza la curva en el punto, y el vector normal es perpendicular al tangente y tiene magnitud uno

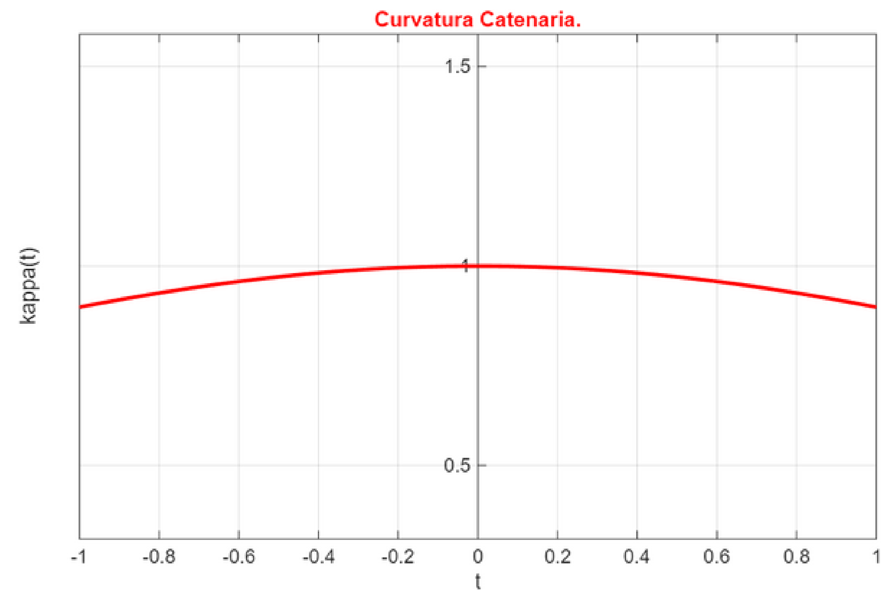
$$\vec{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \ senh\left(\tfrac{t}{3}\right)\vec{i} + \tanh\left(\tfrac{t}{3}\right)\vec{j} \qquad \vec{n}(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|} = -\tanh\left(\tfrac{t}{3}\right)\vec{i} + sech\left(\tfrac{t}{3}\right)\vec{j}$$

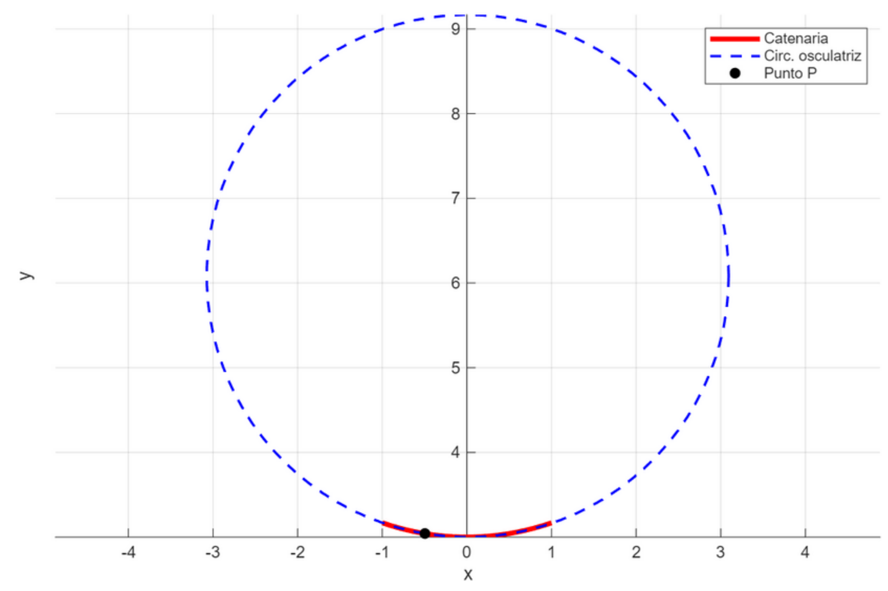




Curvatura y Circunferencia Osculatriz

$$\kappa(t) = \frac{1}{3\cosh^2(t/3)} \qquad R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$





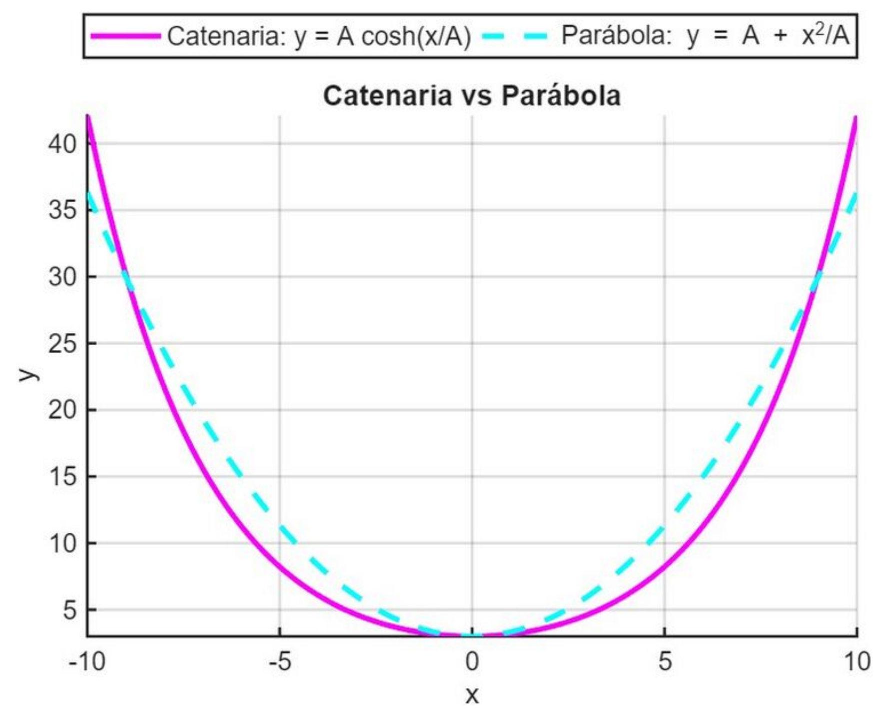
Aplicación en Ingeniería Civil

Fenómeno Catenaria. La catenaria es la forma natural de equilibrio de un cable bajo su propio peso (Leibniz y Huygens, 1691). Es fundamental en estructuras como:

- Puentes colgantes
- Líneas de alta tensión
- Arcos invertidos y bóvedas

Similitud Parábola

A primera vista, la catenaria y la parábola parecen casi iguales. Sin embargo, Huygens demostró que la catenaria sigue un coseno hiperbólico, mientras que la parábola surge de fuerzas uniformes. Su diferencia se aprecia en la curvatura y el crecimiento de sus extremos.

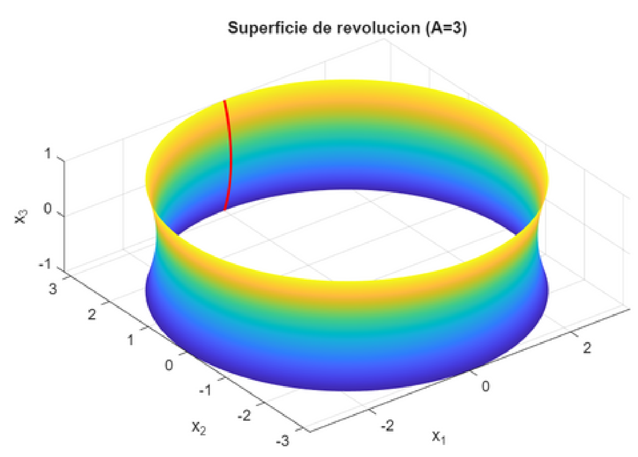


Superficie de Revolución: Catenoide

El catenoide es la superficie mínima que une dos circunferencias obtenida al rotar la parametrización de la catenaria con un determinado radio de revolución. Es la única superficie de revolución con área mínima y aparece en física, arquitectura y tensioactivos.

Si rotamos la catenaria 90° obtenemos la parametrización:

$$\gamma(t) = (0,\ A\cosh(t/A)\ \ A\cosh(t)) \qquad A = 3.$$



·**Masa del Catenoide:** Sea la densidad $f(t, \theta)$ dada la masa se expresa como

$$M = \iint_S f\, dS.$$

Mediante la sustitucion de valores e intervalos de integración y hallada su integral, calculamos el valor de la masa que es igual a 1,26465uds.

Referencias

- https://www.uv.es/ivorra/Libros/Catenaria.pdf
- www.ingenieros-civiles.es
- www2.caminos.upm.es
- https://es.wikipedia.org/wiki/Catenaria