

La ecuación del calor en la esfera

Daniel Tormos Fernando Madrid

Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I.A.A.B.

Introducción

El objetivo de este trabajo es explicar cómo se puede definir la ecuación del calor para funciones reales definidas en una variedad diferenciable. Además, lo ejemplificamos resolviendo la ecuación con condición inicial en el caso de la esfera bidimensional.

Preliminares

La ecuación del calor convencional es

$$\partial_t u(x, t) = k \Delta_x u(x, t), \quad k > 0.$$

donde $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, Ω es un abierto de \mathbb{R}^n . Es el resultado de modelizar la difusión del calor (u) en una región del espacio (Ω). En la deducción, el Laplaciano Δ aparece al tomar la divergencia de un gradiente, tras usar la ley de Fourier.

Dada una variedad M , una métrica es una aplicación g que para cada punto $p \in M$ da un producto escalar $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, que varía suavemente con p . Si damos coordenadas x^i , una base de $T_p M$ es $\{\partial_i\}_{i \leq n}$, con base dual $\{dx^i\}_{i \leq n}$. Las componentes de la matriz de g se denotan como g_{ij} y las de su inversa como g^{ij} .

Denotamos como $\mathfrak{X}(M)$ y $\Omega^1(M)$ al conjunto de campos vectoriales y al conjunto de 1-formas, respectivamente.

Si $F = F^i \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ (usando notación de Einstein), f es una función diferenciable en la variedad, se define la 1-forma $df = (\partial_i f) dx^i \in \Omega^1(M)$, que actúa sobre F como derivada direccional.

El operador de Laplace-Beltrami

Para funciones reales definidas en una variedad, no se puede aplicar el gradiente ni la divergencia de la manera convencional (es decir, $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\text{div} = \nabla \cdot$), sino que hace falta dar una definición intrínseca de estos.

El gradiente de una función f se define como el único campo $\nabla_g f$ de $\mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $F \in \mathfrak{X}(M)$, $g(\nabla_g f, F) = df(F)$. En coordenadas, esto implica que $\nabla_g f = g^{ij} (\partial_i f) \partial_j$. Es decir, la forma del gradiente depende de la métrica. Por ejemplo, en el plano \mathbb{R}^2 con coordenadas cartesianas, $g_{ij} = \delta_{ij}$, por lo que recuperamos el gradiente convencional. Ahora bien, si consideramos coordenadas polares, el gradiente queda $\nabla_g f = (\partial_r f, \frac{1}{r^2} \partial_\theta f)$.

La divergencia en p de un campo vectorial diferenciable F se puede definir de la siguiente manera. Sea ϕ_t el flujo de F , que es un difeomorfismo en la variedad. Sea $\{U_n\}$ una base de entornos de p . Entonces,

$$\text{div}_g(F)(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(U_n)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Vol}(\phi_t(U_n)).$$

En coordenadas se tiene que $\text{div}_g(F) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} F^i)$, donde $g = \det(g_{ij})$. La forma de la divergencia también depende de la métrica.

Con esto ya podemos definir el operador de Laplace-Beltrami:

$$\Delta_g = \text{div}_g(\nabla_g) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j).$$

Este operador es la generalización del Laplaciano a variedades diferenciables. La modelización de la ecuación del calor en variedades es la misma que en el caso convencional, pero usando div_g y ∇_g .

En el caso de la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 ,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2.$$

Resolución de la ecuación en la esfera

La ecuación del calor adimensionalizada en \mathbb{S}^2 es

$$u_t - \Delta_{\mathbb{S}^2} u = 0. \quad (1)$$

Probamos por separación de variables: $u(\theta, \phi, t) = X(\theta, \phi)T(t)$, donde θ es el ángulo polar y ϕ el longitudinal. Sustituyendo en (1) y dividiendo por $T(t)X(\theta, \phi)$ queda

$$\frac{\Delta_{\mathbb{S}^2} X(\theta, \phi)}{X(\theta, \phi)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

La solución de la ecuación para T es $T(t) = c_1 e^{-\lambda t}$, donde c_1 es una constante. La ecuación para X es $\Delta_{\mathbb{S}^2} X(\theta, \phi) = -\lambda X(\theta, \phi)$. Separamos variables nuevamente con $X(\theta, \phi) = \Phi(\phi)\Theta(\theta)$ y llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\Phi}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta (\Theta)) + \frac{\Theta}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2 (\Phi) = -\lambda \Theta \Phi$$

Multiplicando por $\frac{\sin^2(\theta)}{\Phi \Theta}$ obtenemos:

$$\frac{1}{\Phi} \partial_\phi^2 (\Phi) = -\frac{\sin(\theta)}{\Theta} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta (\Theta)) - \lambda \sin^2(\theta) = -m^2 \quad (2)$$

La solución para Φ es:

$$\Phi(\phi) = c_2 e^{im\phi}$$

La periodicidad de Φ fuerza que $m \in \mathbb{Z}$.

Para la ecuación polar en (2), aplicamos el cambio de variable $x = \cos(\theta)$ y llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx} ((1-x^2)\Theta'(x)) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})\Theta(x) = 0.$$

Esta ecuación tiene singularidades en $x = \pm 1$, que corresponden a los polos de la esfera, y solo tiene soluciones regulares en $x = \pm 1$ si $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $|m| < l$, los llamados polinomios de Legendre P_l^m .

Por tanto, las soluciones de la ecuación del calor son

$$u_l^m(\theta, \phi, t) = k_l^m e^{-l(l+1)t} Y_l^m(\theta, \phi),$$

donde k_l^m es una constante, $Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$ son los armónicos esféricos normalizados, que forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Si imponemos una condición inicial en (1), podemos usar un principio de superposición y calcular los coeficientes de Fourier para obtener la solución. Las justificaciones de estos métodos son muy similares a las realizadas en clase para la ecuación convencional.

Observaciones

Este trabajo pretende dar una visión general del tema, y sería contraproducente dar demostraciones de todas las proposiciones a las que se hace referencia, por lo que animamos a consultar las referencias e investigar aquello que no quede claro.

Referencias

https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace%E2%80%93Beltrami_operator
https://es.wikipedia.org/wiki/Polinomios_asociados_de_Legendre