MOTIVACIÓN

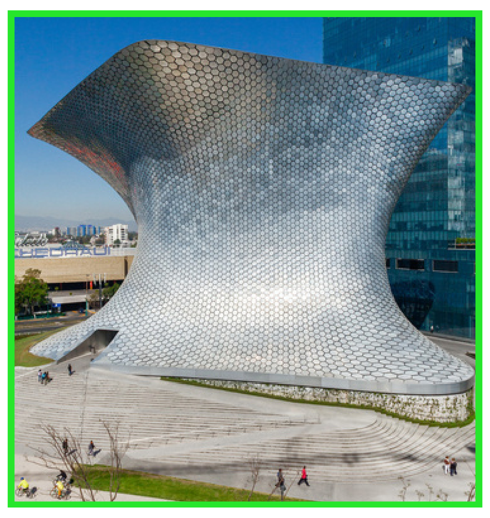
Las coordenadas cilíndricas parabólicas son una extensión natural de las coordenadas parabólicas al espacio tridimensional, especialmente útil para modelar problemas con simetría rotacional alrededor del eje focal de una parábola. Permiten simplificar significativamente la solución de ecuaciones diferenciales en sistemas físicos donde las fronteras naturales tienen forma parabólica, como en ciertos campos de flujo, potenciales electrostáticos alrededor de superficies alargadas, o en el estudio de haces de partículas y antenas parabólicas. Su aplicación transforma problemas complejos en geometrías curvilíneas donde las operaciones matemáticas son más manejables.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Las coordenadas cilíndricas parabólicas (u,v,z)(u,v,z) son un sistema ortogonal poco común, definido por:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2);\ y = uv; z = z$$

Problema central: ¿Cómo se comportan los objetos fundamentales del cálculo vectorial (gradiente, divergencia, rotacional) en este sistema? Este trabajo caracteriza completamente la geometría y el análisis vectorial en estas coordenadas, verificando sus propiedades y aplicándolas a casos concretos.



CÁLCULOS TEÓRICOS

-CAMPOS DE VELOCIDAD LINEAS COORDENADAS

$$\gamma_u' = u\vec{i} + v\bar{j}$$

$$\gamma_v' = -v\vec{i} + u\bar{j}$$

$$\gamma_z' = \vec{k}$$

-FACTORES DE ESCALA

$$h_u = |\gamma_u'| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$h_v = |\gamma_v'| = \sqrt{v^2+u^2}$$

$$h_z = |\gamma_z'| = 1$$

-VECTORES TANGENTES

$$e_u = \frac{\gamma_u'}{h_u} = \frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$e_v = \frac{\gamma_v'}{h_v} = \frac{(-v,u,0)}{\sqrt{v^2+u^2}}$$

$$e_z = \frac{\gamma_z'}{h_z} = (0,0,1)$$

-PRODUCTOS ESCALARES PARA ORTOGONALIDAD

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = u(-v) + v(u) + 0 = 0$$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_z} = 0$$

$$\vec{r_v} \times \vec{r_z} = 0$$

-ELEMENTOS DIFERENCIALES

Longitud de arco:

$$ds^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + dz^2$$

Volumen

$$dV = (u^2+v^2)dudvdz$$

-OPERACIONES DIFERENCIALES

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{df}{du}\vec{u} + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{df}{dv}\vec{v} + \frac{df}{dz}\bar{z}$$

Los vectores $\{\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_z}\}$ forman una BON+

COORDENADAS CILÍNDRICAS PARABÓLICAS

GRÁFICAS

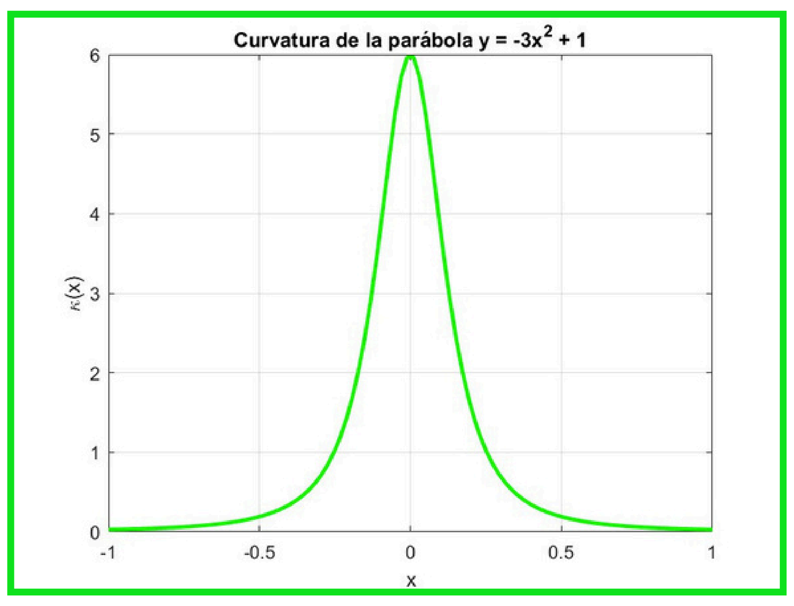
FÓRMULA PARÁBOLA:

$$y = -Ax + B, x \in [-1,1]$$

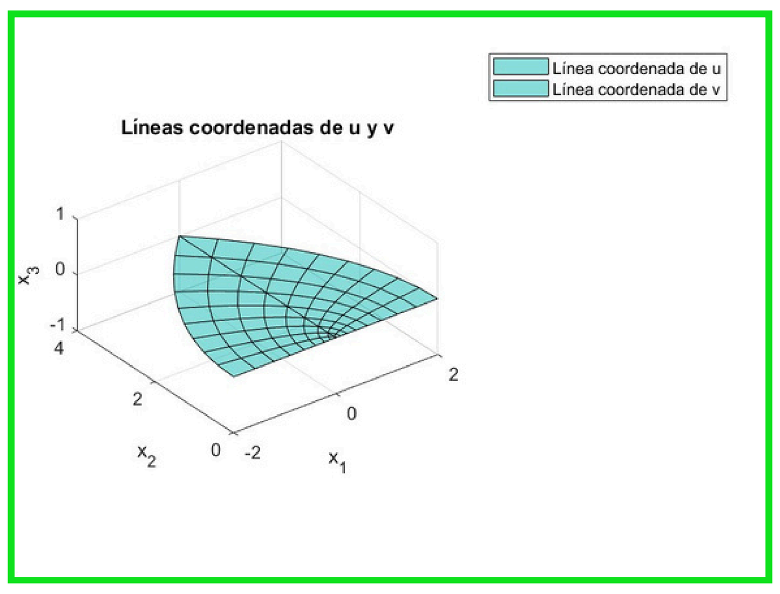
A=3, B=1 $\quad y = -3x + 1, x \in [-1,1]$

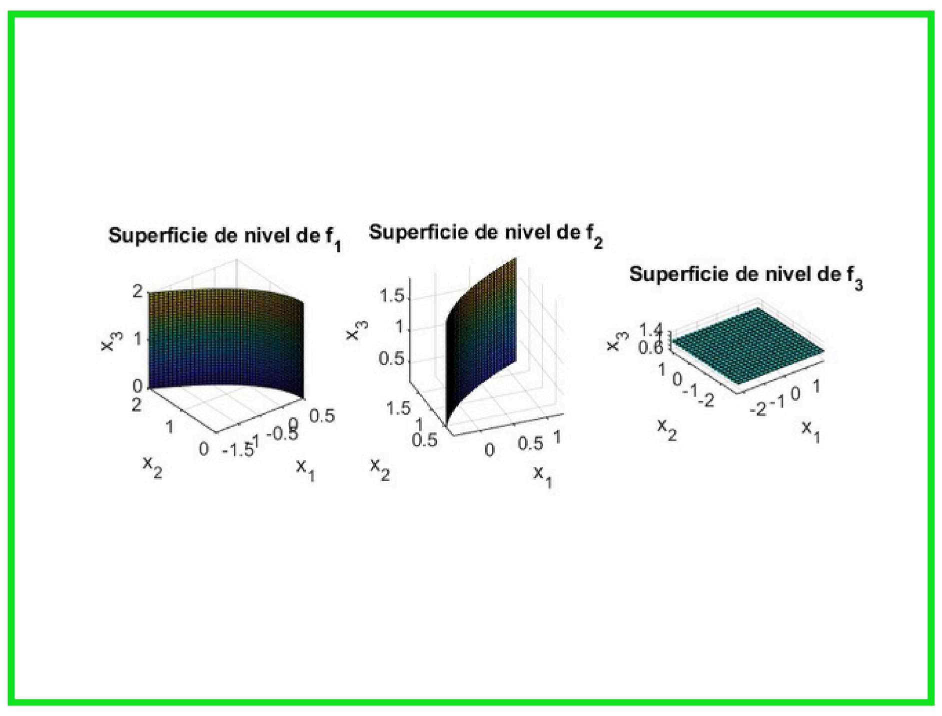
CURVATURA: $\quad k(x) = \dfrac{6}{1 + (36x^2)^{\frac{3}{2}}}$

punto de mayor curvatura: (0,6)

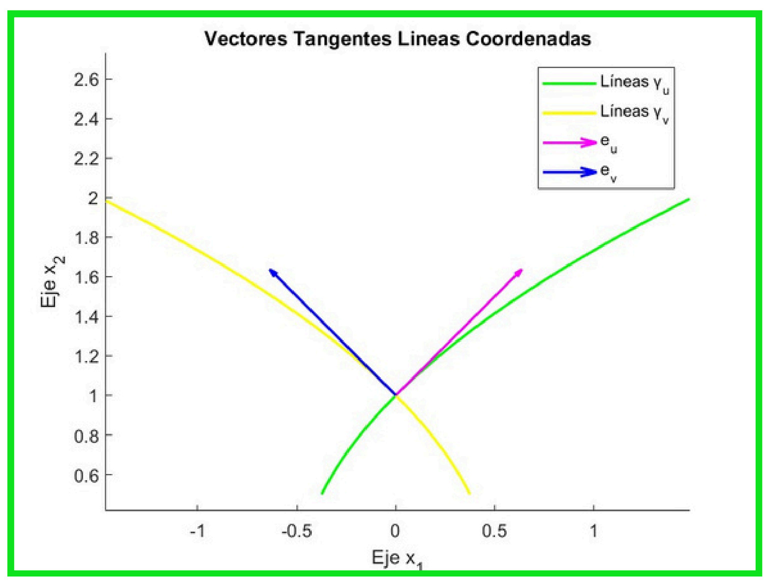


Esta es una representación 3D de una superficie paramétrica en el sistema. Las **líneas coordenadas de u y v** (σ y τ) se obtienen manteniendo las otras dos coordenadas fijas. El patrón de cuadrícula que forman ilustra la **ortogonalidad** del sistema: las curvas de ' σ ' constante son siempre perpendiculares a las curvas de ' τ ' constante.





Estas figuras muestran las tres superficies de nivel obtenidas al fijar cada coordenada σ, τ, ϕ a un valor constante. Se observan dos **paraboloides coaxiales** (f_1 y f_2) que se abren en direcciones opuestas y un **semiplano** f_3 a través del eje Z. La intersección de estas superficies perpendiculares define cualquier punto en el espacio.



Los vectores e_u y e_v son los vectores base **tangentes** a las curvas coordenadas (γ_u y γ_v). El hecho de que e_u y e_v formen un ángulo de 90 grados en su punto de intersección es la prueba visual de que las coordenadas cilíndricas parabólicas constituyen un **sistema ortogonal.**

BIBLIOGRAFÍA

https://dma.aq.upm.es/profesor/rosado_e/Leccion_Regladas.pdf información sobre las superficies regladas https://prezi.com/p/rueykj5pmi5_/superficie-reglada/ información sobre las aplicaciones en la ingeniería https://www.lifeder.com/aplicaciones-parabola-vida/ información sobre el uso de la parábola en ingeniería https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Algebra/Libro%3A_Algebra_universitaria_y_trigonometria_(Beveridge)/05%3A_Secciones_C%C3%B3nicas_-_C%C3%ADrculo_y_Par%C3%A1bola/5.03%3A_Aplicaciones_de_la_Par%C3%A1bola información sobre el uso de la parábola en ingeniería https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_elemental_(Corral)/07%3A_Geometr%C3%ADa_Anal%C3%ADtica_y_Curvas_Planas/7.02%3A_Par%C3%A1bolas información sobre el uso de la parábola en ingeniería https://matematix.org/parabola-como-lugar-geometrico/ información sobre el uso de la parábola en ingeniería https://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola_(matem%C3%A1tica) información sobre el uso de la parábola en ingeniería Categorías: Páginas con errores de resaltado de sintaxisTeoría de CamposTC25/26

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

GRUPO 51 | LUCÍA ÁLVAREZ CEGARRA, ALBA JORGE URRACA, GUADALUPE MORALO ALONSO, CRISTINA ZAMORANO REINOSO

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS