UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

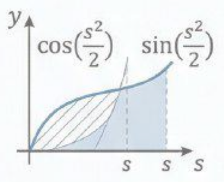
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

La Clotoide: Propiedades Matemáticas y Aplicaciones en Ingeniería

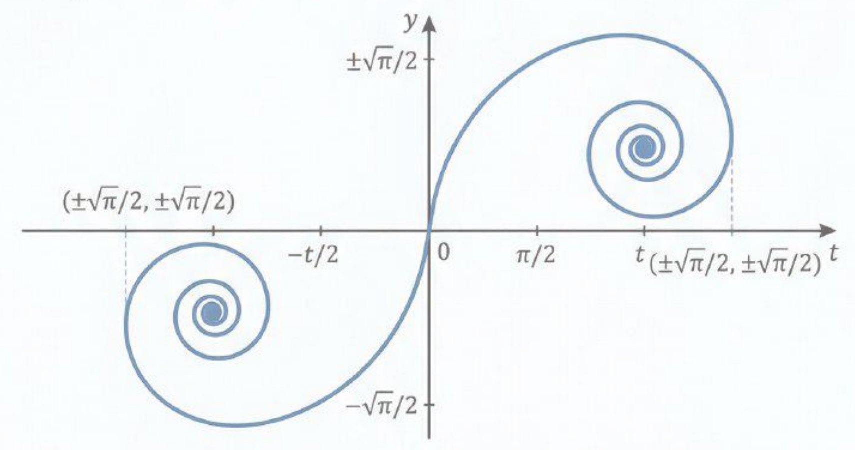
Introducción de la curva

1. Definición Matemática

$$\gamma(t)=\left(\int_0^t \cos\frac{s^2}{2}\,ds,\ \int_0^t \sin\frac{s^2}{2}\,ds\right)$$

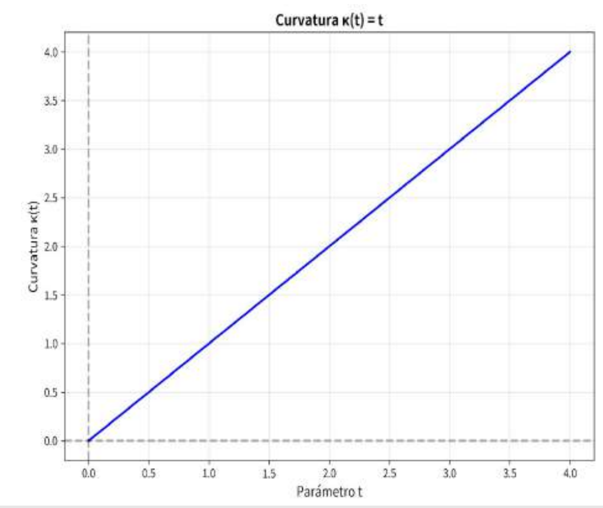


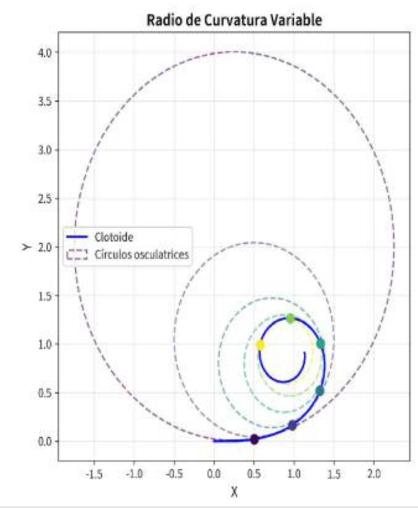
2. Representación Visual



Curvatura

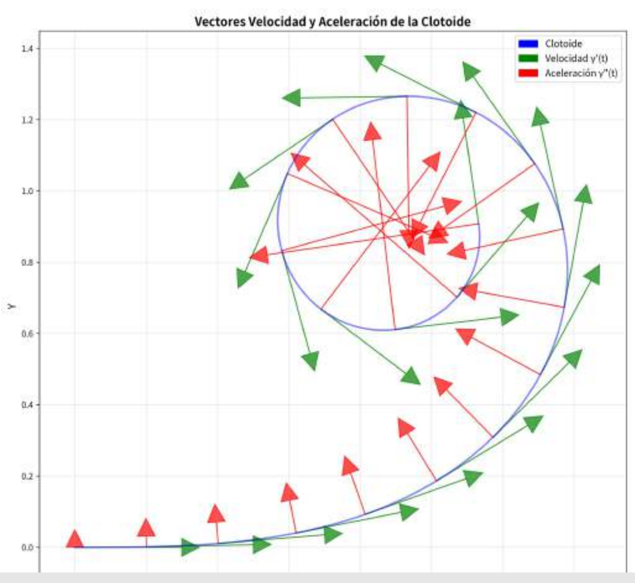
$$\kappa(t)=\frac{x'(t)\cdot y''(t)-x''(t)\cdot y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{cos(\frac{t^2}{2})\cdot t\cdot cos(\frac{t^2}{2})-(-t\cdot sin(\frac{t^2}{2})\cdot sin(\frac{t^2}{2}))}{\sqrt{[(cos(\frac{t^2}{2}))^2+(sin(\frac{t^2}{2}))^2]^3}}=\frac{t}{1}=t, t\in[0,4]$$





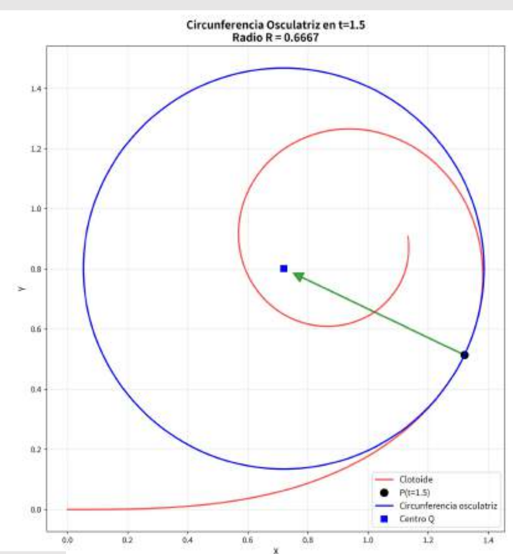
Velocidad y aceleración

$$\vec{\gamma'}=cos(\frac{t^2}{2})\vec{i}+sin(\frac{t^2}{2})\vec{j}$$
$$\vec{\gamma''}=-t\cdot sin(\frac{t^2}{2})\vec{i}+t\cdot cos(\frac{t^2}{2})\vec{j}$$



Circunferencia osculatriz

$$R(t)=\frac{1}{\kappa(t)}$$
$$Q(t)=\gamma(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\vec{n}(t)$$



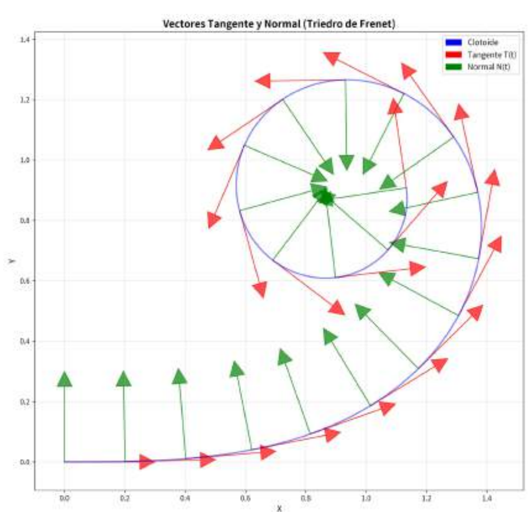
Vectores tangente y normal

El vector tangente:

$$\vec{t}(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}=\frac{\gamma'(t)}{1}=cos(\frac{t^2}{2})\vec{i}+sin(\frac{t^2}{2})\vec{j}$$

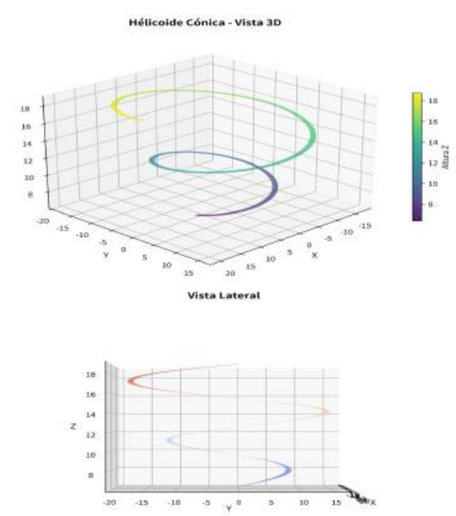
El vector normal:

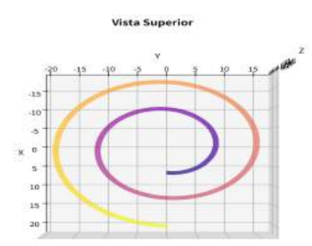
$$\vec{n}(t)=\frac{-y'(t)\vec{i}+x'(t)\vec{j}}{\sqrt{x'(t)^2\vec{i}+y'(t)^2\vec{j}}}=\frac{-sen(\frac{t^2}{2})\vec{i}+cos(\frac{t^2}{2})\vec{j}}{1}=-sen(\frac{t^2}{2})\vec{i}+cos(\frac{t^2}{2})\vec{j}$$

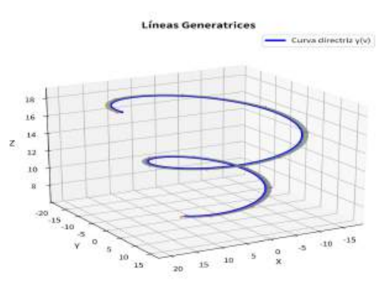


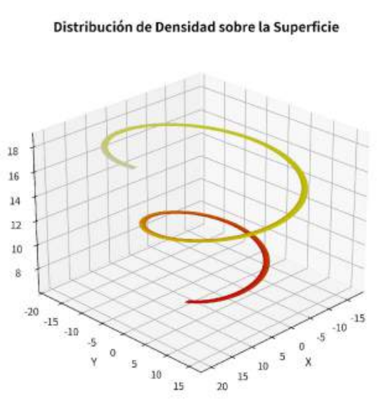
Helicoide cónico

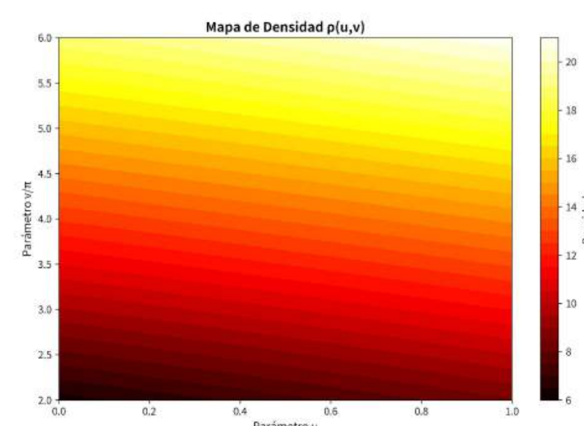
$$\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))=(tcos(t),tsen(t),t), t\in(2\pi,6\pi)$$











Aplicaciones en Ingeniería

Conclusión Final: La clotoide es un ejemplo magistral de cómo una **función matemática compleja** se traduce directamente en **seguridad, eficiencia y confort** en nuestra infraestructura diaria. Es una **solución matemática elegante** al desafío de conectar líneas rectas y curvas circulares de una manera compatible con la física del movimiento humano y vehicular.

Bibliografía

https://moodle.upm.es/
https://images.google.com/
https://mat.caminos.upm.es/wiki/P%C3%A1gina_principal