COORDENADAS CILÍNDRICAS PARABÓLICAS

Teoría de Campos - Curso 2025-2026

Marta Cuevas, Carlota Sánchez, Andrea de Sousa, Claudia Gámez

Escuela Técnica Superior de Caminos, Canales y Puertos, Madrid

0. Introducción

Como las coordenadas cilíndricas pueden verse como la extensión de las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, definiendo la variable z como la altura cartesiana x_3, de manera análoga, las coordenadas cilíndricas parabólicas generalizan un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ respecto de las coordenadas parabólicas de $\mathbb{R}^2$.

Sirven principalmente para simplificar ecuaciones y problemas cuya geometría natural está asociada a parábolas rotadas alrededor de un eje.

1. Lineas coordenadas

Parametrizaciones de las líneas coordenadas γ_u,γ_v,γ_z:

- **Línea coordenada** γ_u:Manteniendo v y z constantes, y variando u

$$\gamma_u(t) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2 - v^2}{2}, \\ x_2 = t\,v, \\ x_3 = z. \end{cases}$$

- **Línea coordenada** γ_v : Manteniendo u y z constantes, y variando v

$$\gamma_v(t) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{u^2 - t^2}{2}, \\ x_2 = u\,t, \\ x_3 = z. \end{cases}$$

- **Línea coordenada** γ_z: Manteniendo u y v constantes, y variando z:

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{u^2 - v^2}{2}, \\ x_2 = u\,v, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

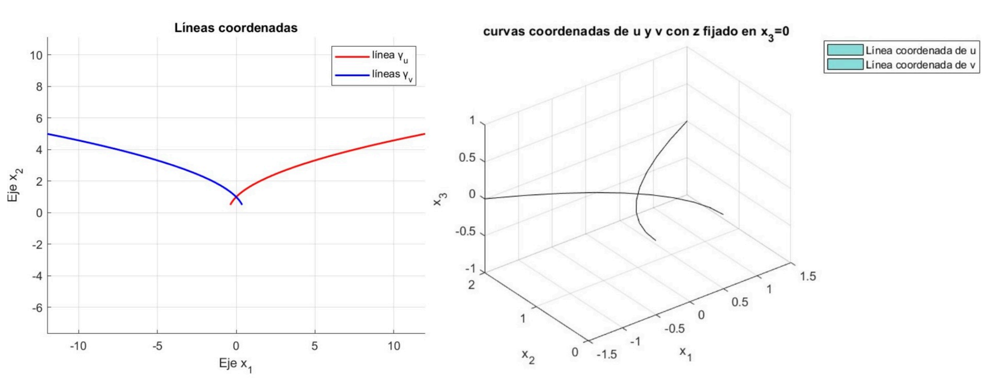

Figure 1: Las curvas coordenadas asociadas a \(u\) y \(v\) tienen forma de parábolas parametrizadas por \(u\) y \(v\).

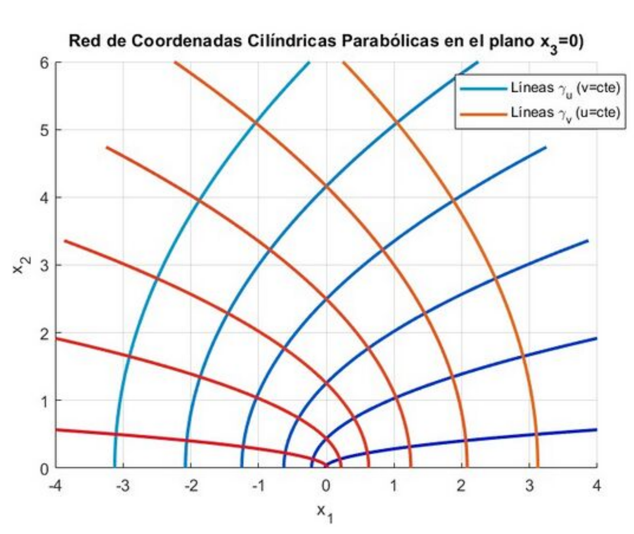

Figure 2: La curvatura de las diferentes líneas coordenadas del sistema cilíndrico parabólico, dibujadas en el plano x_3, varía según el parámetro t.

2. Campos velocidad y vectores tangentes

Campos velocidad

Estos son los vectores tangentes a γ y los obtenemos derivando las coordenadas.

Derivada respecto a u:

$$\gamma_u' = \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = u, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = v, \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_u' = u\,\vec{i} + v\,\vec{j}.$$

Derivada respecto a v:

$$\gamma_v' = \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -v, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = u, \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial v} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_v' = -v\,\vec{i} + u\,\vec{j}.$$

Derivada respecto a z:

$$\gamma_z' = \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial z} = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_z' = \vec{k}.$$

Los factores de escala h_u, h_v, h_z corresponden a los módulos de los campos velocidad:

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1$$

Vectores tangentes

Los vectores tangentes deben de ser unitarios y se obtienen normalizando los vectores.

$$\vec{e}_u = \frac{\gamma_u'}{|\gamma_u'|} = \frac{\gamma_u'}{h_u} = \frac{u\,\vec{i} + v\,\vec{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

$$\vec{e}_v = \frac{\gamma_v'}{|\gamma_v'|} = \frac{\gamma_v'}{h_v} = \frac{-v\,\vec{i} + u\,\vec{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

$$\vec{e}_z = \frac{\gamma_z'}{|\gamma_z'|} = \frac{\gamma_z'}{h_z} = \vec{k}.$$

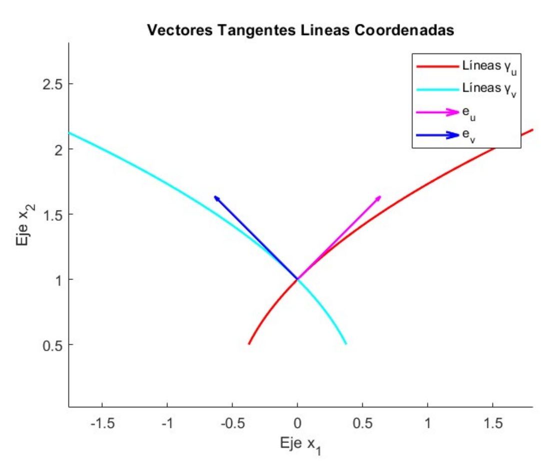

Figure 3: Los vectores $\vec{e}_u$ y $\vec{e}_v$ son los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas γ_u y γ_v.

Vector posición

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ -v & u & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u^2+v^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{u^2-v^2}{2} \\ uv \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u^3+uv^2}{2\sqrt{u^2+v^2}} \\ \dfrac{vu^2+v^3}{2\sqrt{u^2+v^2}} \\ z \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\vec{r} = \frac{u^3+uv^2}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_u + \frac{vu^2+v^3}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_v + z\,\vec{e}_z.$$

3. Operadores

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2$$
$$P = (x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$$

3.1. Gradiente

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Sustituyendo en el gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{e}_v.$$

Por tanto, el gradiente en el punto de interés es:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_u + \vec{e}_v).$$

3.2. Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_z F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_z F_v) + \frac{\partial}{\partial z}(h_u h_v F_z)\right].$$

La divergencia del campo vectorial $\vec{r}$ tiene la expresión:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{1}{2}(3u^2+v^2+u^2+3v^2) + (u^2+v^2)\right] = \frac{3(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 3.$$

3.3. Rotacional

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\begin{vmatrix} h_u\,\vec{e}_u & \dfrac{\partial}{\partial u}(h_u F_u) \\ h_v\,\vec{e}_v & \dfrac{\partial}{\partial v}(h_v F_v) \\ h_z\,\vec{e}_z & \dfrac{\partial}{\partial z}(h_z F_z) \end{vmatrix}$$

La expresión del rotacional queda:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_u & \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,F_u\right) & 0 \\ \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{e}_v & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,F_v\right) & 0 \\ \vec{e}_z & \dfrac{\partial F_z}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

Para el vector posición $\vec{r}$:

$$\nabla \times \vec{r} = 0$$

El campo vectorial es ***irrotacional***, lo que significa que puede expresarse como el gradiente de un potencial; es conservativo y no presenta rotación.

4. Superficies de nivel

Dado el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z), los campos escalares son:

$$f_1(u,v,z) = u, \quad f_2(u,v,z) = v, \quad f_3(u,v,z) = z.$$

Una superficie de nivel se define como el conjunto de puntos:

$$S_c = \{(u,v,z) \mid f(u,v,z) = c\}.$$

Por tanto:

- Para f_1: $u = c \Rightarrow$ cilindro parabólico abierto hacia $-x_1$.
- Para f_2: $v = c \Rightarrow$ cilindro parabólico abierto hacia $+x_1$.
- Para f_3: $z = c \Rightarrow$ plano paralelo al plano (x_1, x_2).

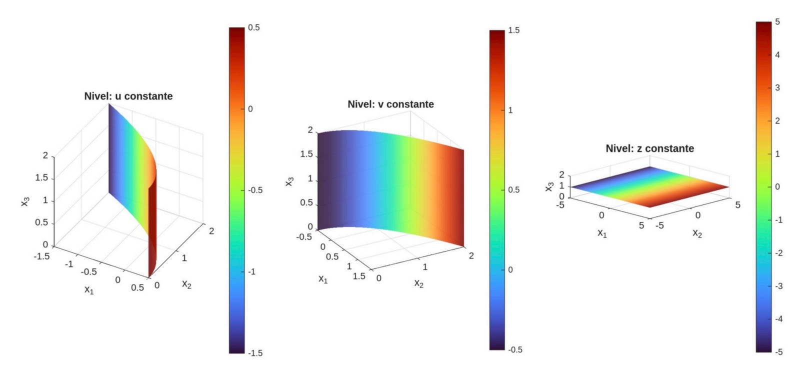

Figure 4: Los planos son superficies regladas porque se pueden generar desplazando una recta en una dirección fija. Los cilindros parabólicos también son superficies regladas, ya que se pueden formar moviendo una recta a lo largo de una curva directriz (la parábola).

5. Curvatura

$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{3/2}} = \frac{6}{\left(1 + 36x^2\right)^{3/2}}$$

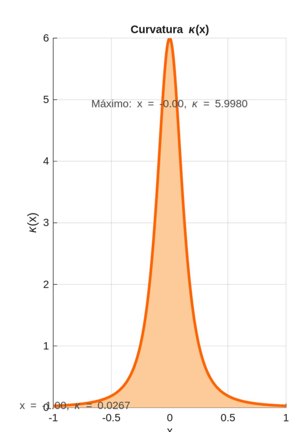

Figure 5: La curvatura es máxima en el vértice y decrece rápidamente hacia los extremos.

6. Aplicaciones en la ingeniería