

# ECUACIÓN DEL CALOR ACOTADA Y NO ACOTADA

Luis García Suárez, Álvaro Moreno Cisneros y Juan Pérez Guerra

Ecuaciones en Derivadas Parciales



## Objetivo

Este proyecto analiza el comportamiento de la **Ecuación del Calor** en diferentes escenarios físicos y matemáticos. Se explora la evolución de la temperatura  $u(x, t)$  partiendo de distintas condiciones iniciales. El estudio contrasta la resolución mediante Series de Fourier para **dominios acotados** frente al método de convolución para **dominios infinitos**. Además, se visualiza la naturaleza de la **Solución Fundamental** y su estrecha relación con la distribución Delta de Dirac. Además, se comprueba si se cumple el **principio del máximo**.

## Introducción

La ecuación del calor describe cómo se distribuye la temperatura en un cuerpo a lo largo del tiempo. Este fenómeno es intrínsecamente **disipativo** y **regularizador**: tiende a suavizar cualquier diferencia de temperatura inicial hasta alcanzar un estado de equilibrio.

Estudiamos la ecuación en su forma unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde  $\alpha$  es la difusividad térmica. El comportamiento de la solución  $u(x, t)$  depende críticamente del dominio:

- **Dominio Acotado:** Resuelto mediante Series de Fourier, donde imponemos condiciones de contorno Dirichlet.
- **Dominio Infinito:** Resuelto mediante la convolución del dato inicial con el núcleo de calor  $\Phi(x, t)$  que definiremos más adelante.

## Caso acotado

En esta sección se analiza la evolución del calor en una varilla de longitud finita ( $L$ ). Para ello, vamos a imponer condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$u(0, t) = 0 \text{ y } u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Estas condiciones modelan físicamente una barra cuyos extremos están en contacto con focos térmicos constantes a  $0^\circ\text{C}$ . Aunque la solución teórica es una suma infinita, en nuestros experimentos trabajamos en el mundo discreto aproximando la serie mediante una suma finita de  $N$  términos:

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^N c_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Los coeficientes  $c_n$  se calculan mediante el producto escalar en  $L^2$  de la función inicial  $f(x)$  con la base ortogonal de senos:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Utilizamos la siguiente función como condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  para visualizar en una gráfica como va disminuyendo la temperatura de la barra a lo largo del tiempo tomando  $\alpha = 1$ :

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

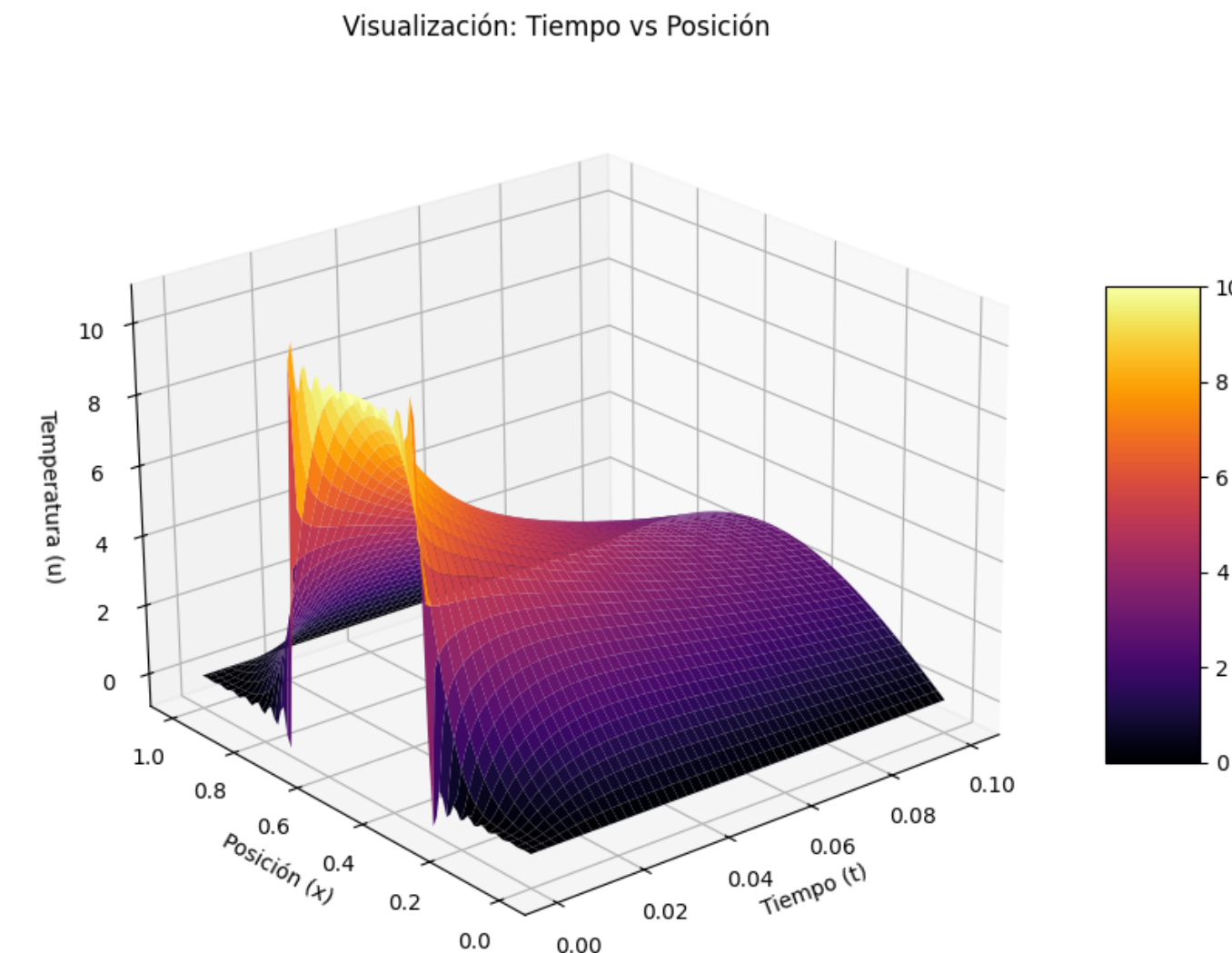


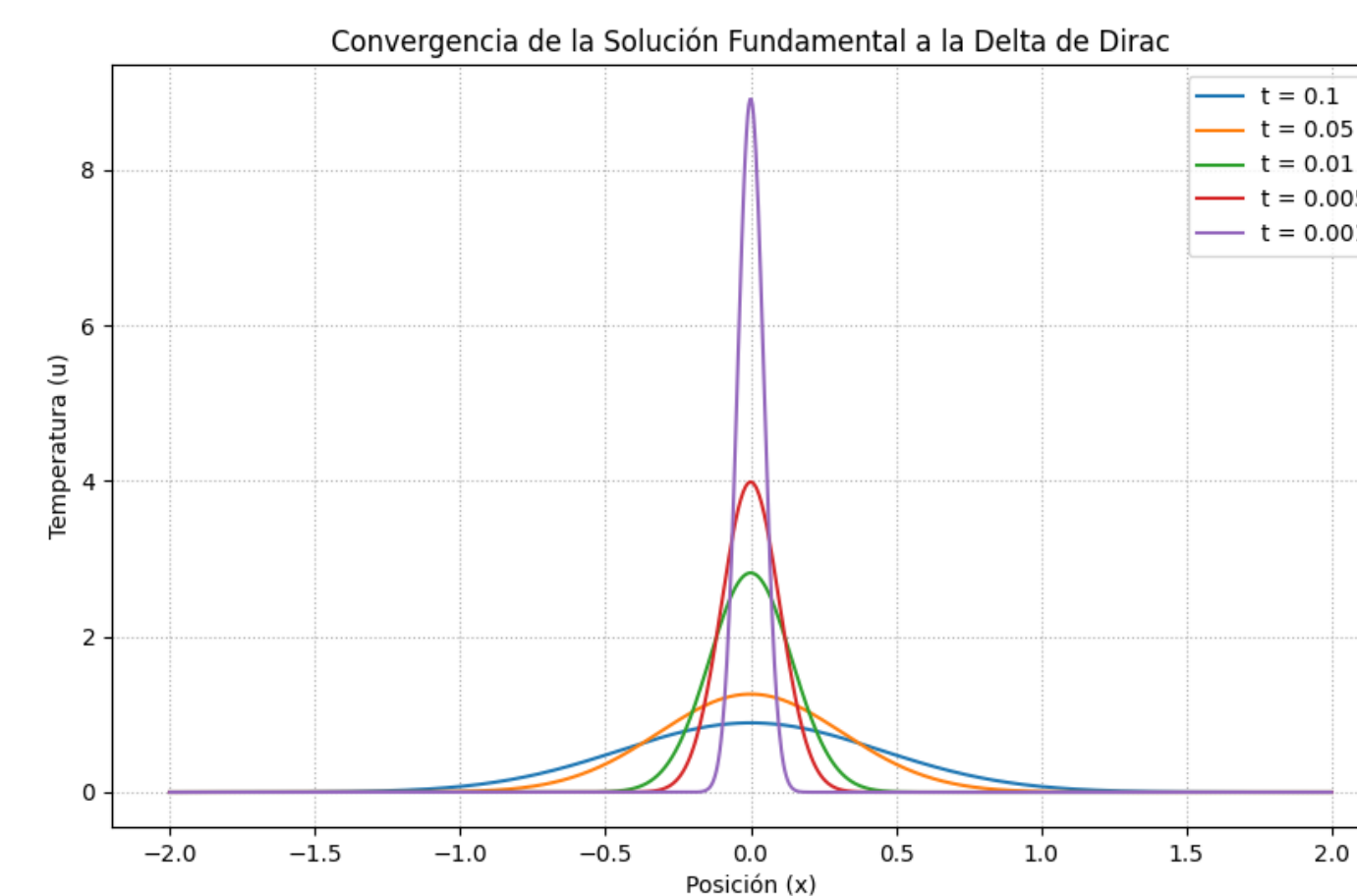
Fig. 1: Ecuación del calor caso acotado

## La Solución Fundamental

En esta sección se analiza el "núcleo de calor", la solución elemental que permite construir soluciones más complejas en dominios no acotados. Que viene dada por la siguiente expresión:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$$

- **Propiedad de Dirac:** A medida que  $t \rightarrow 0$ , la función se vuelve infinitamente alta y estrecha, pero manteniendo siempre un área bajo la curva igual a 1 (conservación de la masa).
- **Interpretación:** Matemáticamente, decimos que  $\Phi(x, t)$  converge a la Delta de Dirac,  $\delta(x)$ .

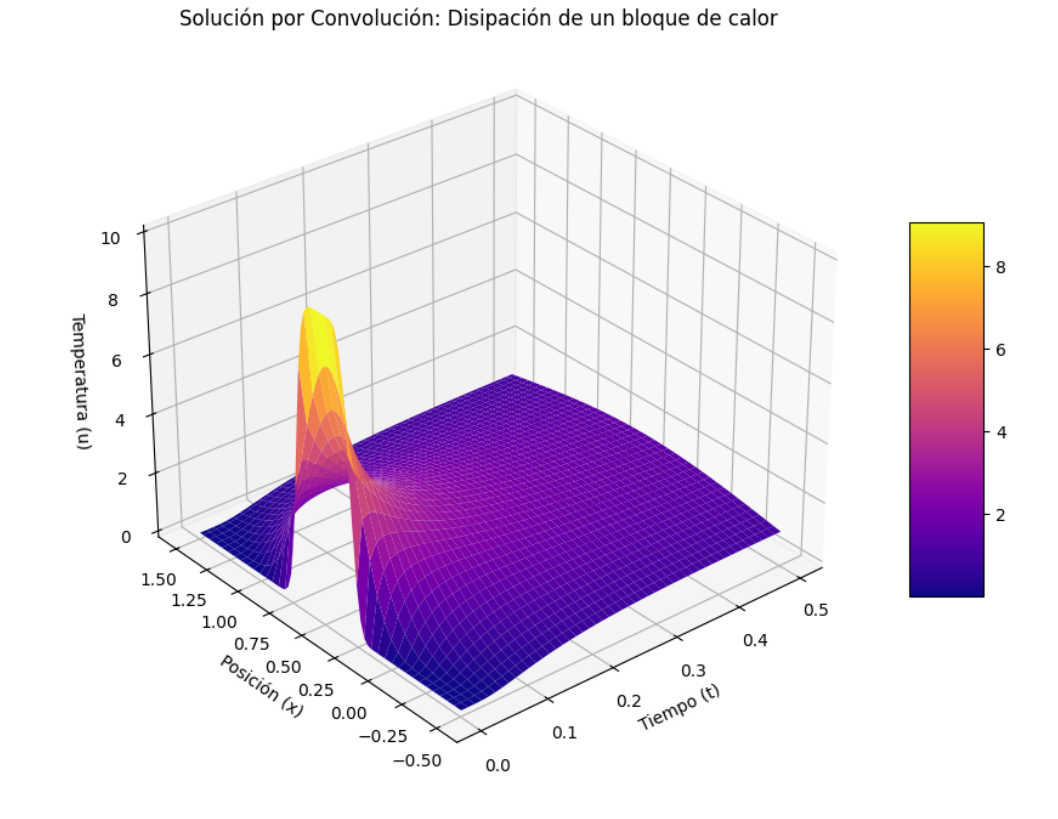


## Caso no acotado

En esta sección se estudia cómo se propaga el calor en una recta infinita, donde no existen fronteras que limiten el movimiento de la energía. La temperatura  $u(x, t)$  se obtiene mediante la convolución del dato inicial  $f(x)$  con el núcleo de calor  $\Phi(x, t)$ :

$$u(x, t) = (f * \Phi)(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \Phi(x - y, t) dy$$

Lo visualizamos utilizando la misma condición inicial que en el caso acotado y con  $\alpha = 1$ .



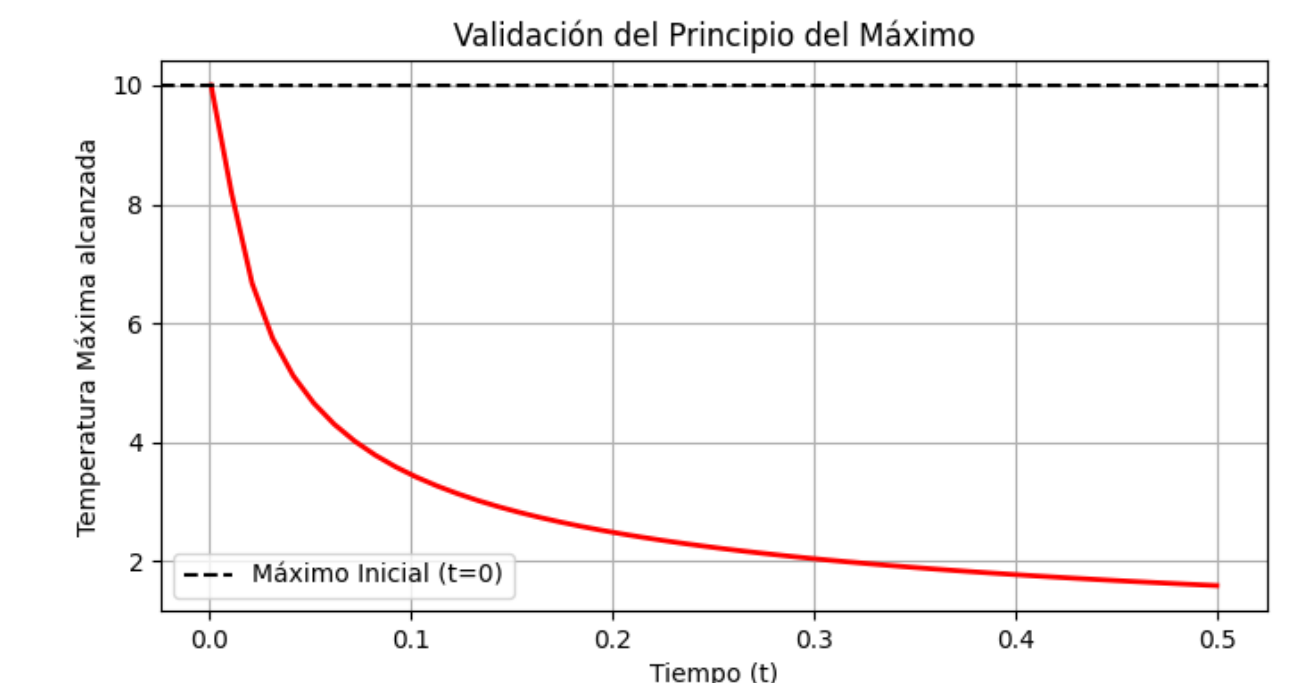
## Validación mediante el Principio del Máximo

En esta sección se comprueba que las soluciones obtenidas respetan las cotas físicas impuestas por las condiciones iniciales y de contorno.

El Principio del Máximo para la ecuación del calor establece que, en un dominio acotado, el valor máximo de la temperatura  $u(x, t)$  debe alcanzarse necesariamente en el "contorno parabólico":

$$\max u = \max_{\partial Q_T} u$$

En nuestro caso tanto en el caso acotado como el que no el máximo se alcanza al principio (10):



## Conclusión

Este estudio concluye que la ecuación del calor actúa como un mecanismo de **suavizado instantáneo**, transformando datos iniciales abruptos en funciones suaves ( $C^\infty$ ) para todo  $t > 0$ . La comparativa demuestra que el comportamiento térmico depende del dominio: en el **caso acotado** la energía se disipa por los extremos, mientras que en el **no acotado** se redistribuye mediante la convolución con el núcleo fundamental. Finalmente, el cumplimiento del **Principio del Máximo** en las simulaciones valida que los resultados obtenidos en el mundo discreto son físicamente coherentes con el modelo continuo.

## Referencias

- [1] Matewiki. *Página principal - Escuela de Caminos, UPM*. 2026. URL: [https://mat.caminos.upm.es/wiki/P%C3%A1gina\\_principal](https://mat.caminos.upm.es/wiki/P%C3%A1gina_principal).
- [2] Python Software Foundation. *Python Language Reference*. 2026. URL: <https://www.python.org>.
- [3] Sandro Salsa and Gianmaria Verzini. *Partial Differential Equations in Action - From Modelling to Theory*. Vol. 147. UNITEXT. Springer Nature Switzerland, 2022.