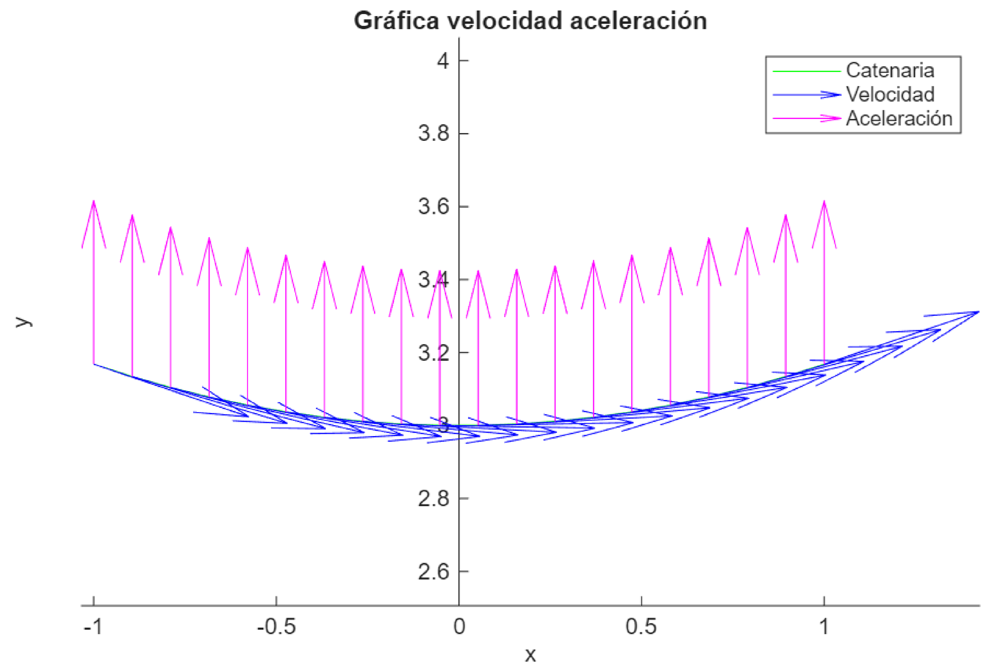
LA CATENARIA

Álvaro Espinosa Pedro Harguindey Lucía de la Riva Sara Gozalo
Universidad Politécnica de Madrid

Introducción

Se denomina catenaria a la curva de equilibrio que adopta un hilo flexible y de densidad homogénea, al estar sujeto exclusivamente a la acción de un campo gravitatorio uniforme y con sus extremos fijos. En términos más precisos, la catenaria no constituye una curva única, sino una familia de curvas. Además, cada punto de la catenaria cumple con el principio de equilibrio estático para las componentes horizontales de fuerza, resultando en una cadena estable libre de desplazamientos laterales.

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN:



PARAMETRIZACIÓN
$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = t\vec{i} + 3cosh(\frac{t}{3})\vec{j}$

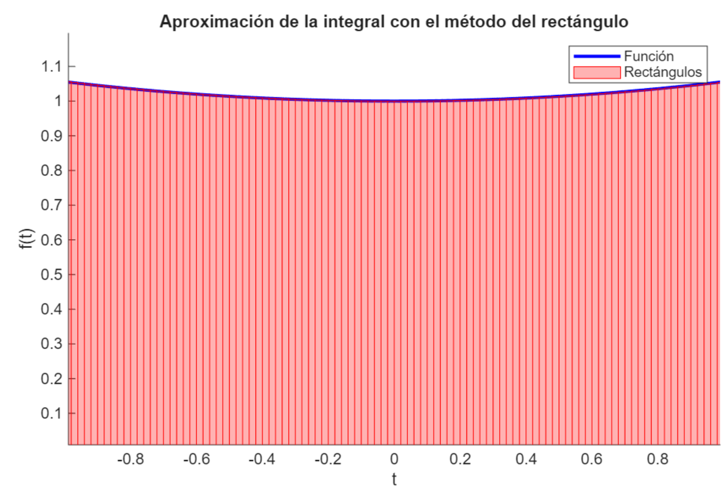
VELOCIDAD :$\gamma'(t) = \vec{i} + \sinh\frac{t}{3}\vec{j}$

ACELERACIÓN: $\gamma''(t) = \frac{1}{3}cosh(\frac{t}{3})\vec{j}$

LONGITUD DE LA CURVA

Es la distancia real medida a lo largo del recorrido entre dos puntos específico

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-1}^{1}\sqrt{(1)^2 + (sinh^2(\frac{t}{3}))}dt = \int_{-1}^{1}\sqrt{cosh^2(\frac{t}{3})}dt = 6sinh(\frac{1}{3}) = \mathbf{2{,}0372}$$



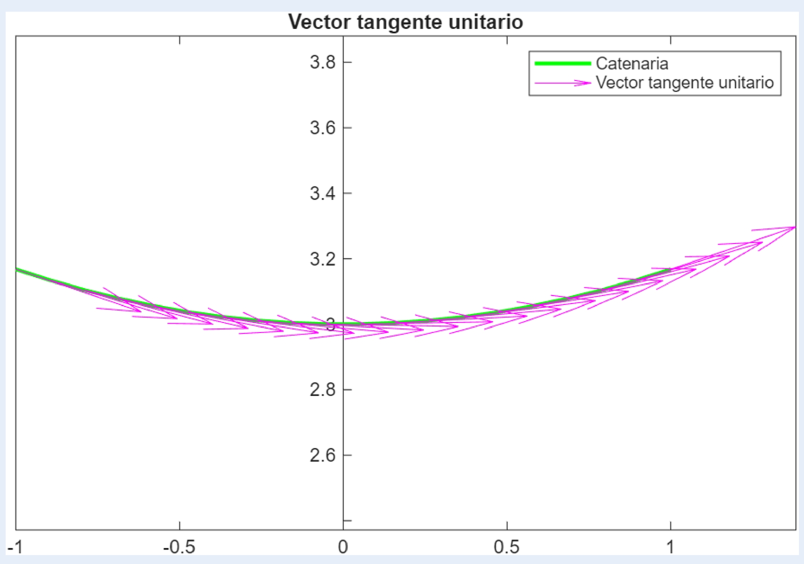
VECTOR TANGENTE Y NORMAL

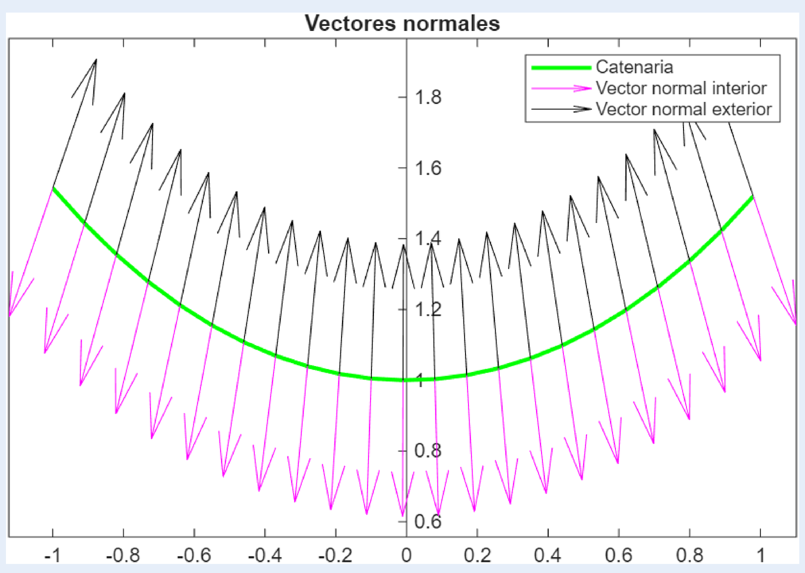
TANGENTE:

$$\frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}} = \frac{\vec{i} + sinh(\frac{t}{3})\vec{j}}{\sqrt{1^2 + sinh^2(\frac{t}{3})}} = \frac{\vec{i} + sinh(\frac{t}{3})\vec{j}}{cosh(\frac{t}{3})} = (\frac{1}{cosh(\frac{t}{3})}, \frac{sinh(\frac{t}{3})}{cosh(\frac{t}{3})})$$

NORMAL:

$$\frac{(-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j})}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{-sinh(\frac{t}{3})\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1^2 + sinh^2(\frac{t}{3})}} = \frac{-sinh(\frac{t}{3})\vec{i} + \vec{j}}{cosh(\frac{t}{3})} = (\frac{-sinh(\frac{t}{3})}{cosh(\frac{t}{3})}, \frac{1}{cosh(\frac{t}{3})})$$

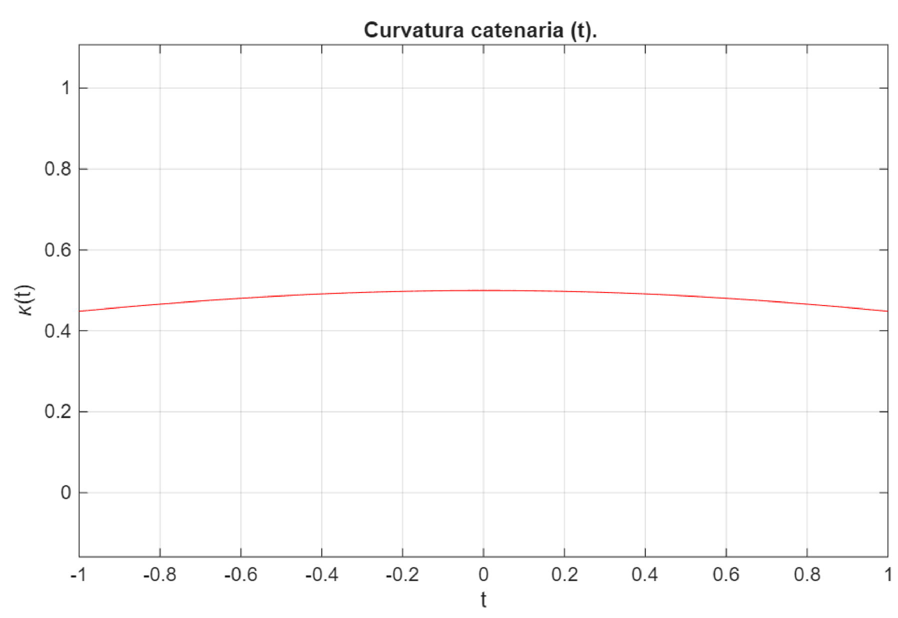




CURVATURA

La curvatura mide la rapidez con la que cambia la dirección de una curva. Es inversamente proporcional al radio: cuanto más cerrada es la curva, mayor es su curvatura.

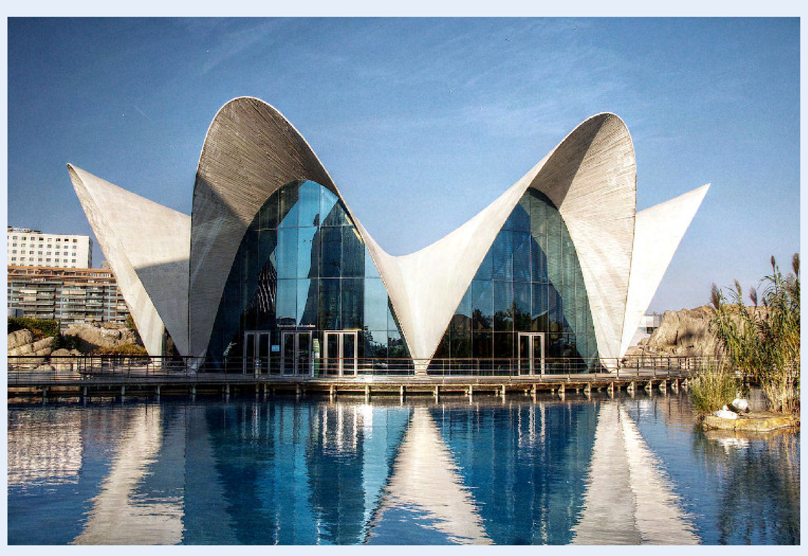
$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cosh\left(\frac{t}{3}\right) - 0\sinh\left(\frac{t}{3}\right)}{\left(1+\sinh^2\left(\frac{t}{3}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cosh\left(\frac{t}{3}\right)}{\left(1+\sinh^2\left(\frac{t}{3}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3\cosh^2\left(\frac{t}{3}\right)}$$

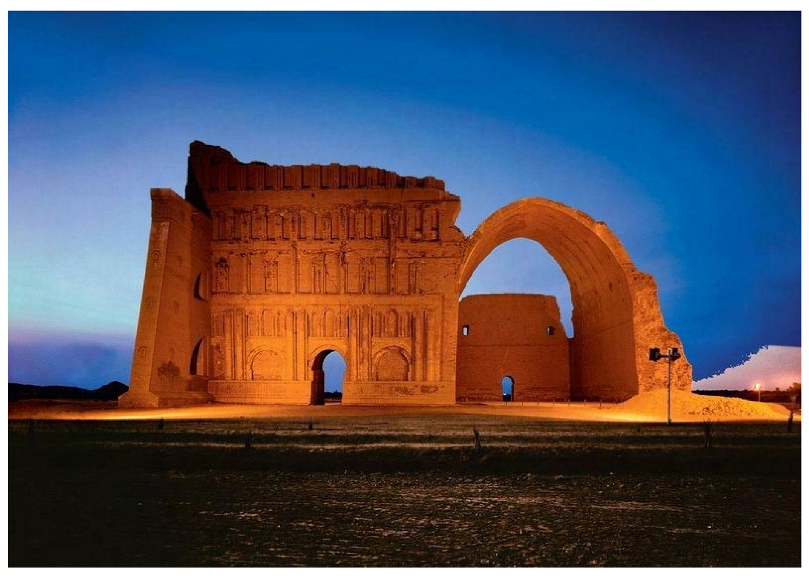


LA CATENARIA

Es la curva que trabaja a tracción pura y, gracias a la Reflexividad Estructural, al invertirse genera el arco funicular, la forma más eficiente para soportar cargas a compresión.

Esta geometría es clave en ingeniería civil para optimizar el diseño de puentes y cables, garantizando estabilidad y ahorro de material.

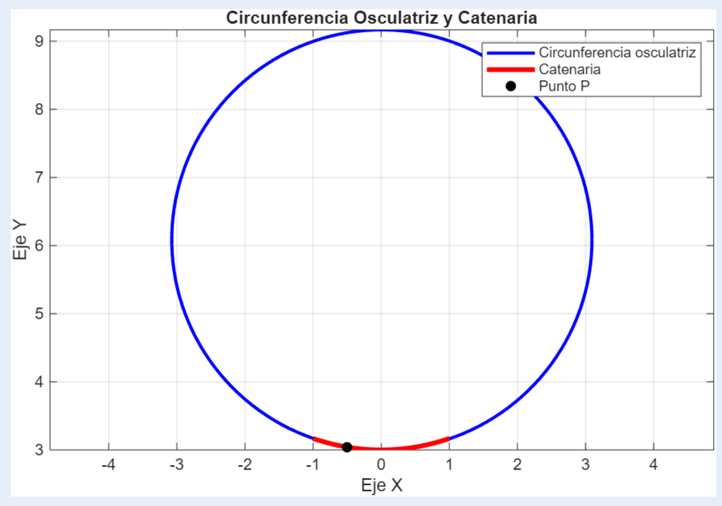




CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ

Es la circunferencia que mejor se ajusta a una curva en un punto, compartiendo sus vectores tangente y normal.Radio de la curvatura:

$$R(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{\cosh(\frac{t}{3})}{(1+\sinh^2(\frac{t}{3}))^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

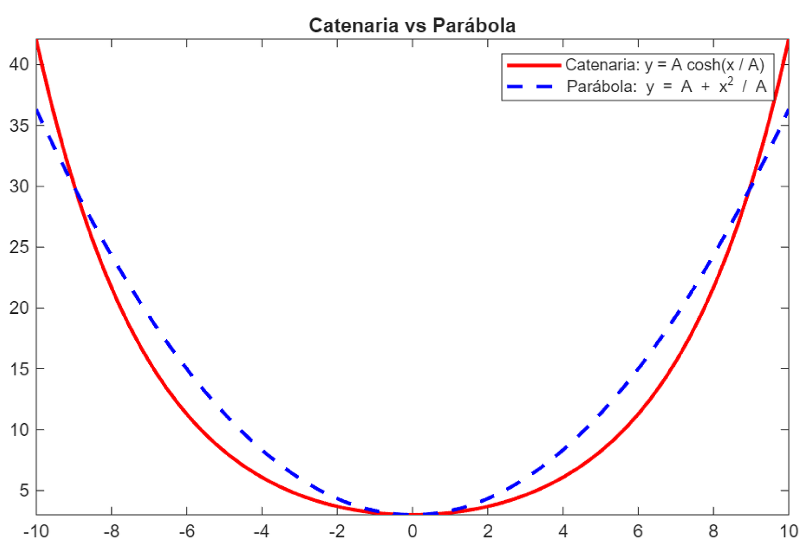


Centro de la curvatura:

$$Q(t) = (t) + \frac{1}{(t)}\vec{n}(t) = (t, 3cosh(\frac{t}{3})) + \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{\cosh(\frac{t}{3})}{(1+\sinh^2(\frac{t}{3}))^{\frac{3}{2}}}}(\frac{-sinh(\frac{t}{3})}{cosh(\frac{t}{3})}, \frac{1}{cosh(\frac{t}{3})})$$

CATENARIA Y PARABOLA

La catenaria es la forma geométrica que se produce cuando una cuerda se suspende sometido exclusivamente a su propio peso que está distribuido uniformemente a lo largo de la curva. En cambio, la parábola es la curva que adopta un cable cuando esta sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal



Catenaria:

$$y = acosh(\frac{x}{a})$$

Parábola:

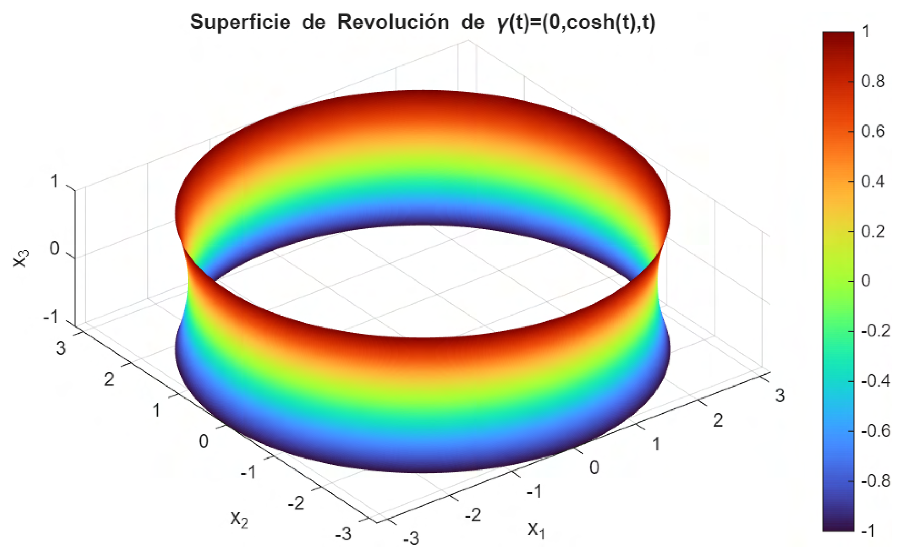
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$cosh(u) \approx 1 + \frac{u^2}{2} \implies y \approx a + \frac{x^2}{2a}$$

SUPERFICIE DE REVOLUCION

El catenoide es la superficie de revolución que se obtiene al girar una catenaria alrededor de un eje horizontal.La fórmula parametrizada es:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left(a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\cos v,\ a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\sin v,\ u\right)$$



DISTRIBUCION DE LA DENSIDAD A LO LARGO DE LA SUPERFICIE

La función densidad dada es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

La función de la densidad parametrizada es:

$$f(u, v) = \frac{u^2}{1 + \cosh^2(u)}$$

La masa de la superficie se calcula con la integral:

$$M = \int_a^b\int_c^d f(u, v)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + (\partial x\partial v)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\,dv\,du = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}(\frac{u^2cosh^2(u)}{1 + cosh^2(u)})dudv$$

Dándonos un resultado de la masa de la superficie igual a: 2.6417

CONCLUSIONES

En conclusión, el dominio de esta curva no solo enriquece la formación técnica del ingeniero, sino que también contribuye a la elaboración de soluciones seguras, económicas y sostenibles en el contexto de la ingeniería moderna.