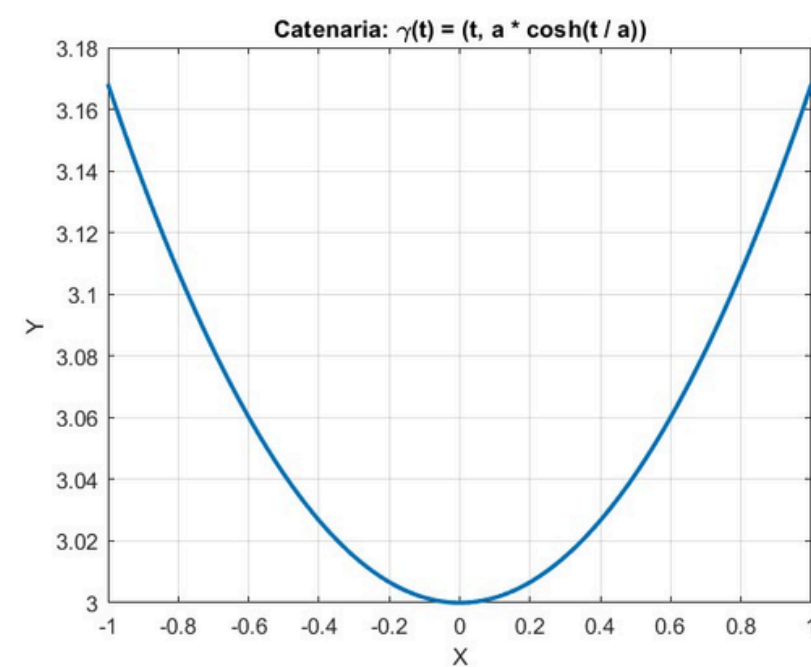


LA CATENARIA

El presente trabajo aborda el análisis geométrico y físico de la catenaria, definida por la parametrización $\gamma(t) = (t, A / \cosh(t/A))$. El estudio de sus propiedades vectoriales cinemáticas, su curvatura y la circunferencia osculatriz. Se incluye una comparativa gráfica y teórica con la parábola para establecer sus similitudes estructurales, y se extiende al espacio tridimensional mediante la generación de su superficie de revolución asociada, el catenoide.

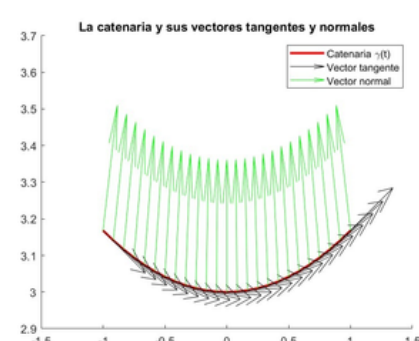


CINEMÁTICA

Análisis del movimiento a lo largo de la curva parametrizada:

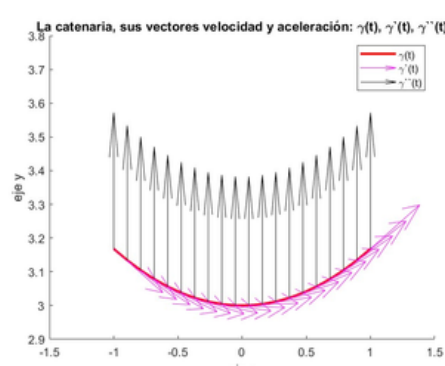
El vector velocidad, tangente a la curva: $\gamma'(t) = i + \sinh(t/A) j$.

El vector aceleración, normal a la curva: $\gamma''(t) = 1/A * \cosh(t/A) j$



El vector tangente $t(t)$ es igual a: $\vec{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{i + \sinh(\frac{t}{A})j}{\cosh(\frac{t}{A})} = \text{sech}(\frac{t}{A})i + \tanh(\frac{t}{A})j$

Su vector normal $n(t)$ es igual a: $\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \text{sech}(\frac{t}{A}) & \tanh(\frac{t}{A}) & 0 \end{vmatrix} = -\tanh(\frac{t}{A})i + \text{sech}(\frac{t}{A})j$



LONGITUD DE LA CURVA

La longitud de una curva parametrizada según un parámetro t en un intervalo $t \in (a,b)$ es: $L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$, donde $|\gamma'(t)|$ es el módulo del vector velocidad.

Por lo tanto, la longitud de la curva catenaria en el intervalo $t \in (-1,1)$ es de **2,037239 unidades**.

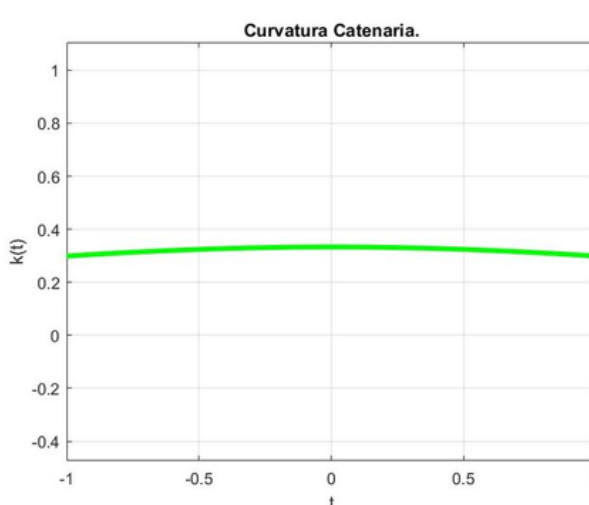
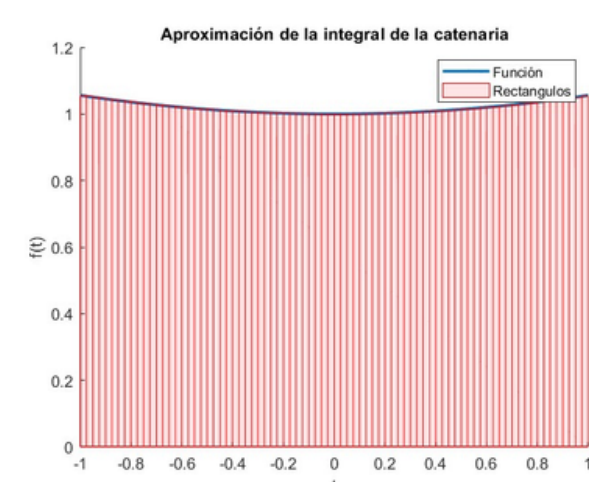
$$L = \int_{-1}^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2(\frac{t}{A})} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2(\frac{t}{A})} dt = \int_{-1}^1 \cosh(\frac{t}{A}) dt = A * [\sinh(\frac{t}{A}) - \sinh(\frac{-1}{A})] = 2A * \sinh(\frac{1}{A}) = 6 * \sinh(\frac{1}{3}) \approx 2,0373$$

CURVATURA

Vamos a estudiar la curva parametrizada centrándonos en su curvatura κ .

Este parámetro nos indica qué tanto se aleja la curva de ser una recta en cualquier ubicación dada.

$$\text{Curvatura: } \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{3}\cosh(\frac{t}{3}) - 0\sinh(\frac{t}{3})}{(1 + \sinh^2(\frac{t}{3}))^{3/2}} = \frac{\cosh(\frac{t}{3})}{3(1 + \sinh^2(\frac{t}{3}))^{3/2}} = \frac{1}{3\cosh^2(\frac{t}{3})}$$

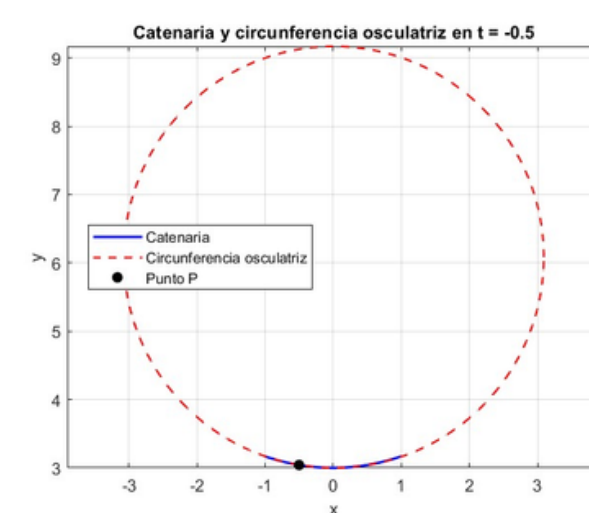


CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ

La circunferencia osculatriz de una curva en un punto es el círculo que mejor se ajusta localmente a la curva en ese punto. Comparten el mismo punto, misma dirección del vector tangente, y misma curvatura.

$$\text{El radio de curvatura es: } R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = 3 \cosh^2\left(\frac{t}{3}\right).$$

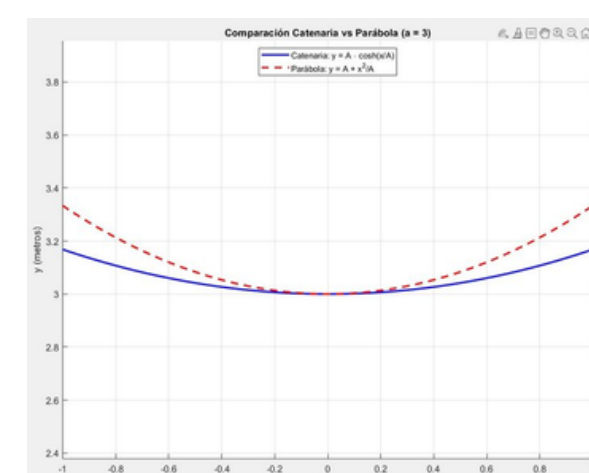
$$\text{En el punto } t_0 = -0.5 \text{ resulta: } R = R(t_0) = 3 \cosh^2\left(\frac{-0.5}{3}\right) = 3 \cosh^2\left(\frac{1}{6}\right) \approx 3.08$$



SEMEJANZAS CON LA PARÁBOLA

El parecido se explica mediante el desarrollo de Taylor alrededor del vértice ($x \approx 0$).

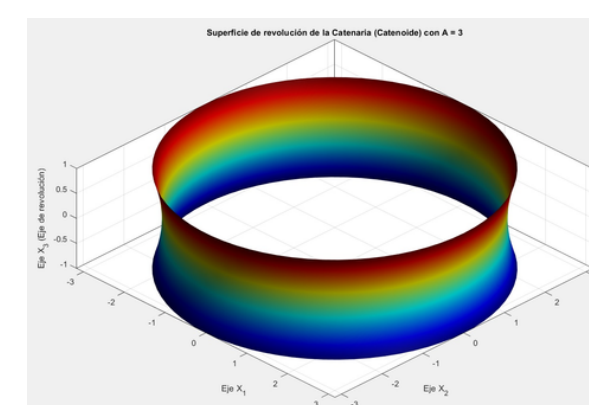
La aproximación $A/\cosh(x/A) \approx A + x^2/A$ demuestra que, cerca del mínimo, el término cuadrático domina y la catenaria se comporta casi igual que una parábola. Sin embargo, al alejarnos del origen, la naturaleza exponencial de la catenaria hace que crezca mucho más rápido ("más esbelta") que el crecimiento polinómico de la parábola.



SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

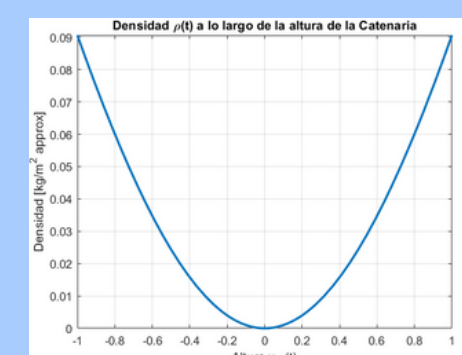
Partimos de una parametrización específica de la curva dada por $\gamma(t) = (0, A \cosh(t/A), t)$, definida en el intervalo $t \in (-1,1)$ y $A=3$.

Se genera la superficie de revolución resultante al girar dicha curva alrededor del eje vertical, lo que da lugar geoméricamente a una superficie conocida como catenoide.



DISTRIBUCIÓN DE LA DENSIDAD

Cálculo de la masa de una superficie con densidad variable. Para ello se emplea la siguiente integral: $M = \iint_S f(x_1, x_2, x_3) dS$,



Tras parametrizar y sustituir nos queda la siguiente integral.

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{t^2}{1 + (A \cosh(t/A))^2} A \cosh^2(t/A) dt.$$

El resultado nos arroja que tiene una masa de **1,26465 unidades**.

CONSTRUCCIONES CIVILES

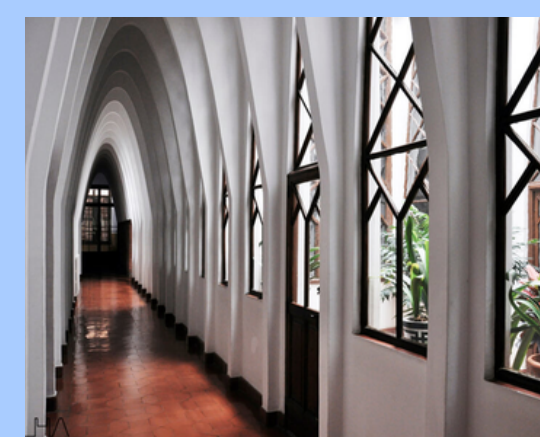


Arco Gateway

Situado en San Luis, Missouri.

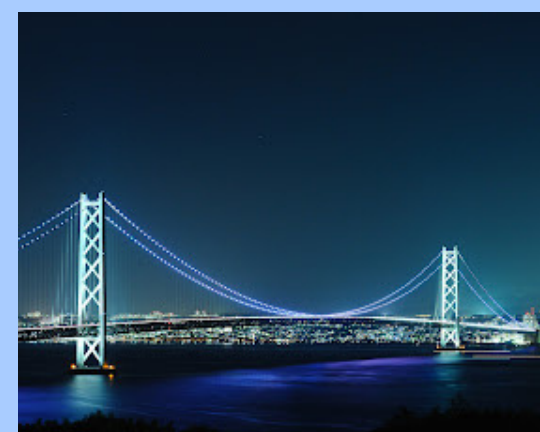
Tiene 194 metros de altura.

Demuestra la capacidad de los arcos catenarios de sostenerse sin necesidad de refuerzos.



Colegio de las Teresianas

Obra de Gaudí, pionero en investigar y hacer uso de los arcos catenarios.



Puente Akashi Kaikyo

Se encuentra en Japón. 3911 metros de longitud. Su vano central tiene 1991 metros. Además de ser el puente colgante más largos del mundo, sus dos cables son los más resistentes y pesados

CONCLUSIÓN

Hemos comprobado que la catenaria es la forma óptima para elementos sometidos a peso propio, diferenciándose matemáticamente de la parábola.

Además, la modelización del catenoide ha permitido calcular propiedades complejas, como la masa con densidad variable, demostrando la necesidad de combinar el cálculo teórico con herramientas numéricas."

BIBLIOGRAFÍA



Todas las gráficas y cálculos han sido calculadas mediante el programa MatLab

Diego Arroyo Gálvez; Sergio Cantero Ozhegov;
Juan Cuesta Tamames; Javier Martínez Hidalgo;
Iván Pineda Ontañón.