La Catenaria

01. Introducción y características principales.

La catenaria da nombre a la curvatura que describe una cuerda ideal homogénea suspendida por sus dos extremos y condicionada únicamente por una fuerza uniforme. En este poster mostraremos sus características fundamentales de interés matemático y físico, así como sus aplicaciones en el mundo de la ingeniería.

$$y = A \cdot cosh\left(\frac{x}{A}\right) \qquad \gamma(t) = (x(t); y(t)) = \left(t; A \cdot cosh\left(\frac{t}{A}\right)\right);\ t \in (-1; 1);\ A = 3$$

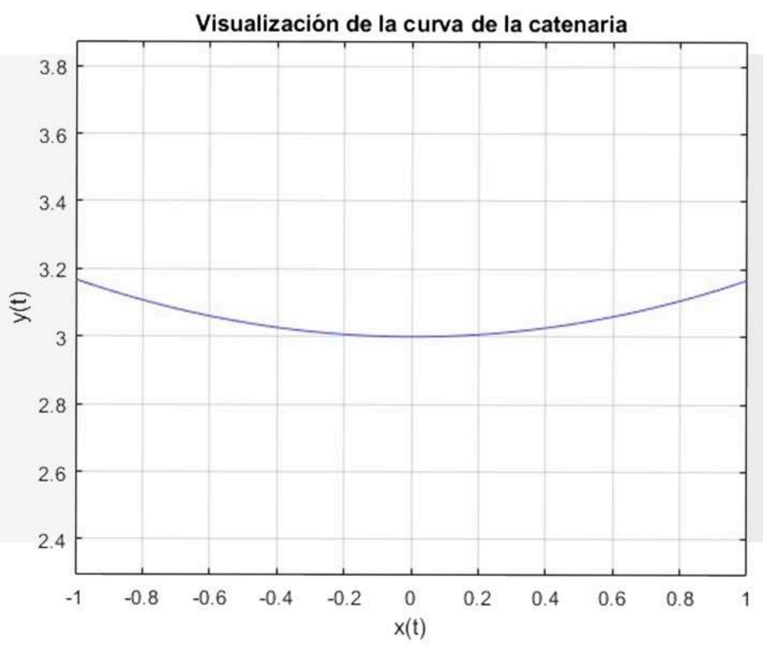

FIGURA 1

Definimos el campo de velocidades como: $\gamma'(t) = \bar{i} + senh\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{j}$

Definimos el campo de aceleraciones como: $\gamma''(t) = \frac{t}{A} \cdot cosh\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{j}$

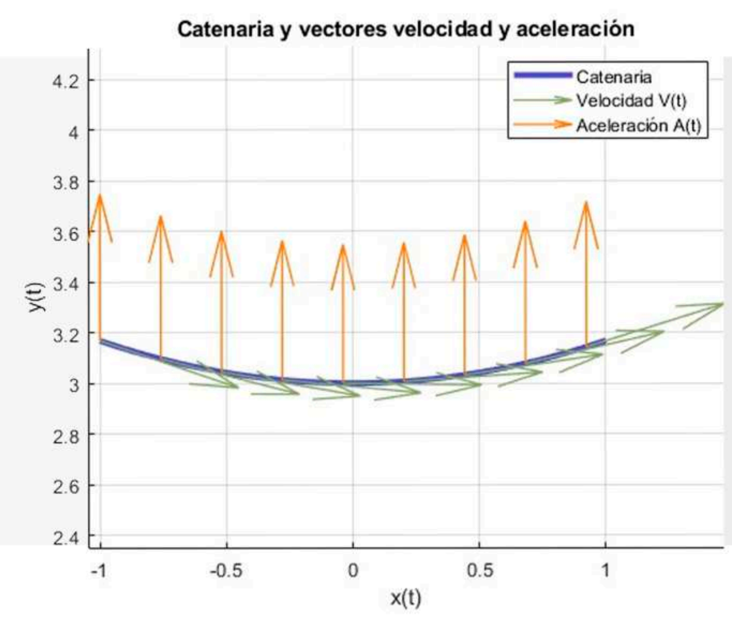

FIGURA 2

Para calcular la longitud de la curva haremos uso del vector velocidad:

$$l(\gamma) = \int^{b} |\gamma'(t)| \cdot dt = \int^{b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$$

que resulta en: $l(\gamma) = \int_{-1}^{1} \left|\bar{i} + senh\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{j}\right| \cdot dt = 2 \cdot A \cdot senh\left(\frac{1}{A}\right) = 2,037$

Se define el vector tangente t(t)como el campo vectorial:

$$\bar{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = sech\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{i} + tanh\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{j}$$

Y se define el vector normal n(t)como el campo vectorial:

$$\bar{n}(t) = \frac{(-y'(t)\cdot\bar{i} + x'(t)\cdot\bar{j})}{|\gamma'(t)|} = -tanh\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{i} + sech\left(\frac{t}{A}\right) \cdot \bar{j}$$

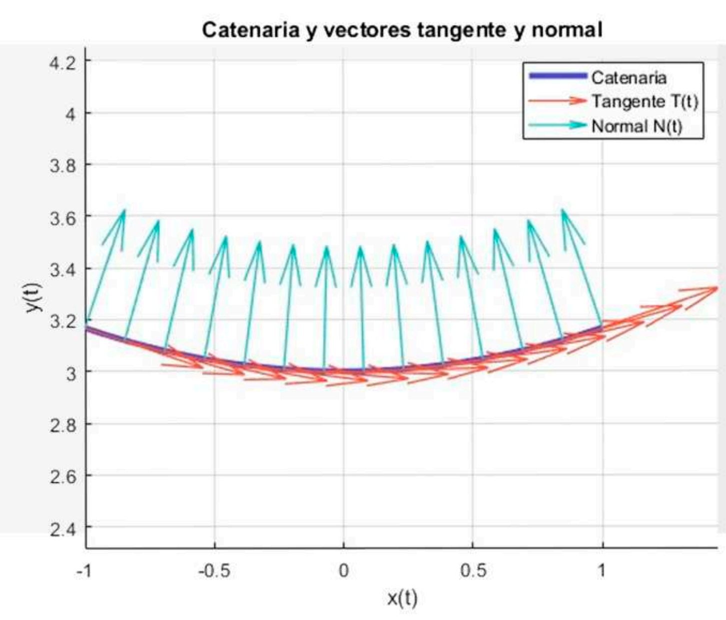

FIGURA 3

0.2 Curvatura.

La curvatura (t) indica cuánto desvío tiene la curva en cada uno de sus puntos. su cálculo en coordenadas cartesianas es el siguiente:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)\cdot y''(t) - x''(t)\cdot y'(t)}{\sqrt{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^3}} = \frac{1}{3\cdot cosh^2\left(\frac{t}{3}\right)}$$

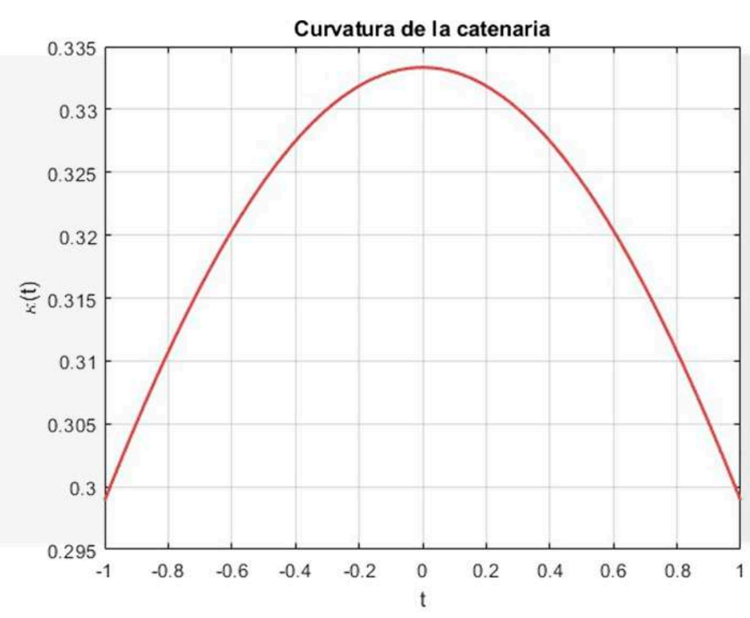

FIGURA 4

La curvatura alcanza su valor máximo en el vértice (t=0) y los valores mínimos en t=-1 y t=1;

03. Circunferencia osculatriz.

Particularizados en el punto $P = \gamma(-0.5)$

$$R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|} = 3,085 \qquad Q(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \bar{n} = (0,00886; 6,082).$$

Definimos la parametrización de una circunferencia genérica:

$$c(t) = \left(Q_x + R \cdot cosh(t), Q_y + R \cdot sen(t)\right);\ t \in (0, 2\pi)$$

nuestra circunferencia osculatriz resultaría en:

$$c(t) = (0,00886 + 3,084 \cdot cos(t); 6,082 + 3,084 \cdot sen(t));\ t \in (0, 2\pi)$$

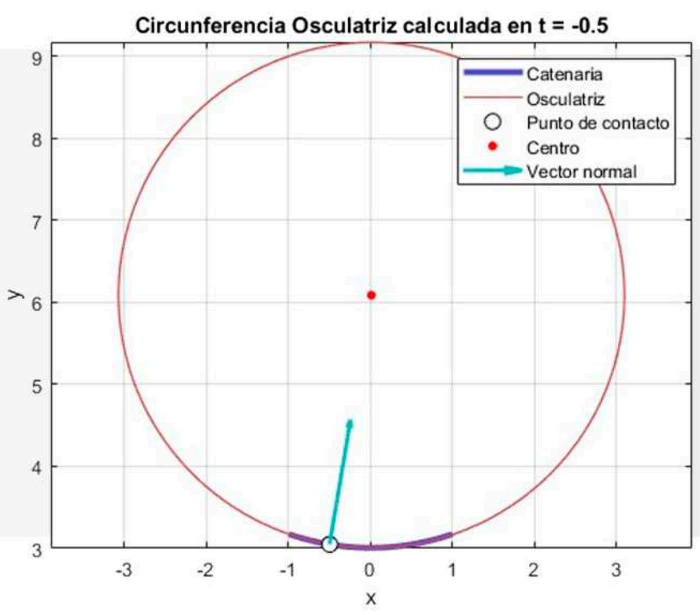

FIGURA 5

04. La Catenaria como estructura civil.

Trasladando la definición teórica ideal a la realidad, lo más destacable es que esta curva se genera de forma natural. Una cadena suspendida en el aire fijada únicamente por sus extremos genera esta curva.

En el terreno de la ingeniería civil suele estar asociada a los cables de alta tensión o al tendido eléctrico de los ferrocarriles. En otros ámbitos, se conoce como arco catenario al arco cuya trayectoria sigue una curva catenaria invertida, lo que permite que se soporte a sí mismo. Este se usa principalmente en cubiertas o techos de estructuras.

05. Catenaria vs Parábola.

Tienen una gran similitud gráfica que hizo que la comunidad científica pensase que se trataba de la misma curva. Con el desarrollo del cálculo infinitesimal, se consiguió hallar la ecuación de la catenaria, descrita por primera vez por Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens y Johann Bernoulli en 1691.

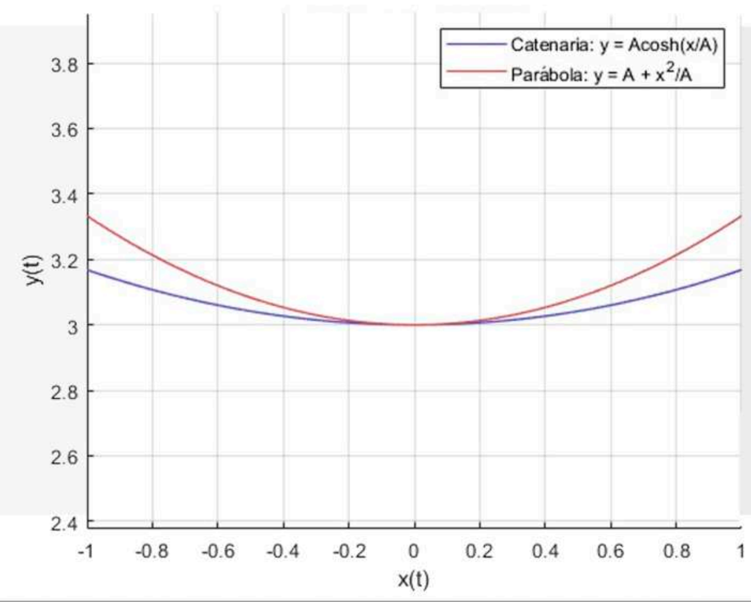

FIGURA 6

06. Superficie Catenoide.

Un catenoide es una superficie de revolución generada al hacer girar la curva alrededor del eje z. La parametrización de la curva de la catenaria en R3 tras una rotación de 90º es:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(0, A \cdot cosh\left(\frac{t}{A}\right), t\right);\ t \in (-1, 1);\ A = 3$$

La parametrización resultante es:

$$\phi(u, v) = \left(A \cdot cosh\left(\frac{u}{A}\right) \cdot cos(v), A \cdot cosh\left(\frac{u}{A}\right) \cdot sen(v), u\right);\ u \in (-1, 1);\ v \in (0, 2\pi)$$

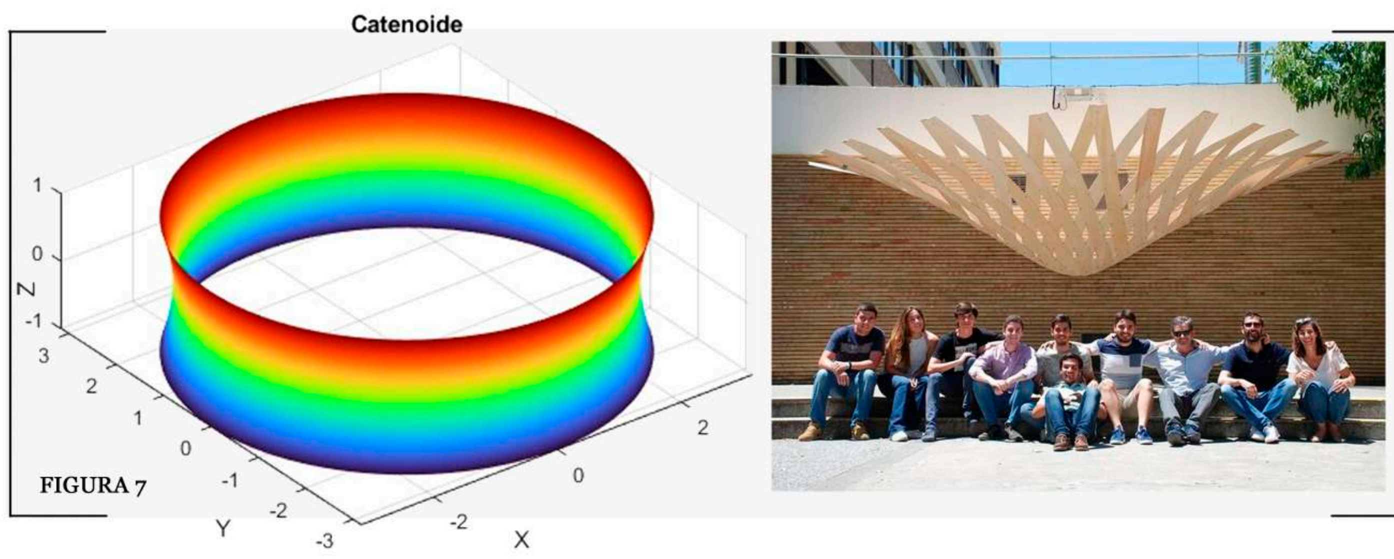

FIGURA 7

Proyecto experimental en el que, en torno a la geometría del catenoide, se busca su adaptación a la vida cotidiana en forma de cubierta.

07. Masa de superficie.

La función de densidad de la superficie está dada por: $f\left(x_1; x_2; x_3\right) = \frac{x_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$

Esta función describe cómo varía la densidad en cada punto de la superficie

$$f(r(u; v)) = \frac{u^2}{1 + A^2 \cdot cosh^2\left(\frac{u}{A}\right)} \qquad M = \iint_S f \cdot dS = 12\pi \int_0^1 \frac{u^2 \cdot cosh^2\left(\frac{u}{3}\right)}{1 + 3^2 \cdot cosh^2\left(\frac{u}{3}\right)} \cdot du$$

Aplicando el método de integración del rectángulo el resultado es: **M=1,265**

BIBLIOGRAFÍA
- Catenaria - Wikipedia
- La catenaria - Carlos Ivorra
- La catenaria en arquitectura - UPM
- Puente de Gundián - Wikipedia
- #geodesic_catenoide

Realizado por:
- Asier Fernández Bote Torrijos
- Jorge Mayoral Bote
- Carlos Mínguez González
- Samuel Portela Trujillo
- Javier Romero Luque