

Motivación

En el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales, solemos asumir que tanto las condiciones iniciales como las condiciones de frontera son funciones bien definidas. Sin embargo, en la modelización real de cualquier fenómeno físico existe una cierta componente no determinista. Para modelar esto, recurrimos a conjuntos de funciones aleatorias, tal que es posible modelizar procesos estocásticos mediante EDPs.



El objetivo del trabajo es el modelizar y caracterizar la incertidumbre en problemas de contorno mediante el uso de series de Fourier con coeficientes aleatorios.

Construcción de la función

Consideraremos un proceso estocástico, centrado (de media 0) sobre el espacio $L^2(-\pi, \pi)$. Definiremos ahora dos variables aleatorias con la misma varianza, una para los cosenos y otra para los senos:

- $a_k^\sigma \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$.
- $b_k^\sigma \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$.

El teorema de Karhunen-Loeve nos garantiza que, bajo estas hipótesis, una función se puede descomponer de la siguiente manera:

$$f_\sigma(x) = \sum_k Z_k \phi_k(x).$$

donde $\{\phi_k(x)\}$ son funciones reales continuas en el intervalo y ortogonales en el intervalo; y Z_k son variables aleatorias con media 0 y varianza σ_k^2 . Teniendo en cuenta la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$ en este espacio, la función resulta:

$$f_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^\sigma \cos(kx) + b_k^\sigma \sin(kx)),$$

eliminando el término a_0^σ porque estamos considerando un proceso centrado.

Momentos de una función aleatoria

Calculamos la **esperanza** en un punto x de la función obtenida:

$$\mathbb{E}[f_\sigma(x)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\sigma \cos(kx) + b_k^\sigma \sin(kx)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}[a_k^\sigma] \cos(kx) + \mathbb{E}[b_k^\sigma] \sin(kx)) = 0,$$

porque $\mathbb{E}[a_k^\sigma] = \mathbb{E}[b_k^\sigma] = 0$ para todo k . Esto nos muestra que la probabilidad de ser positiva o negativa es la misma.

Calculamos ahora la varianza:

$$Var(f_\sigma(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2.$$

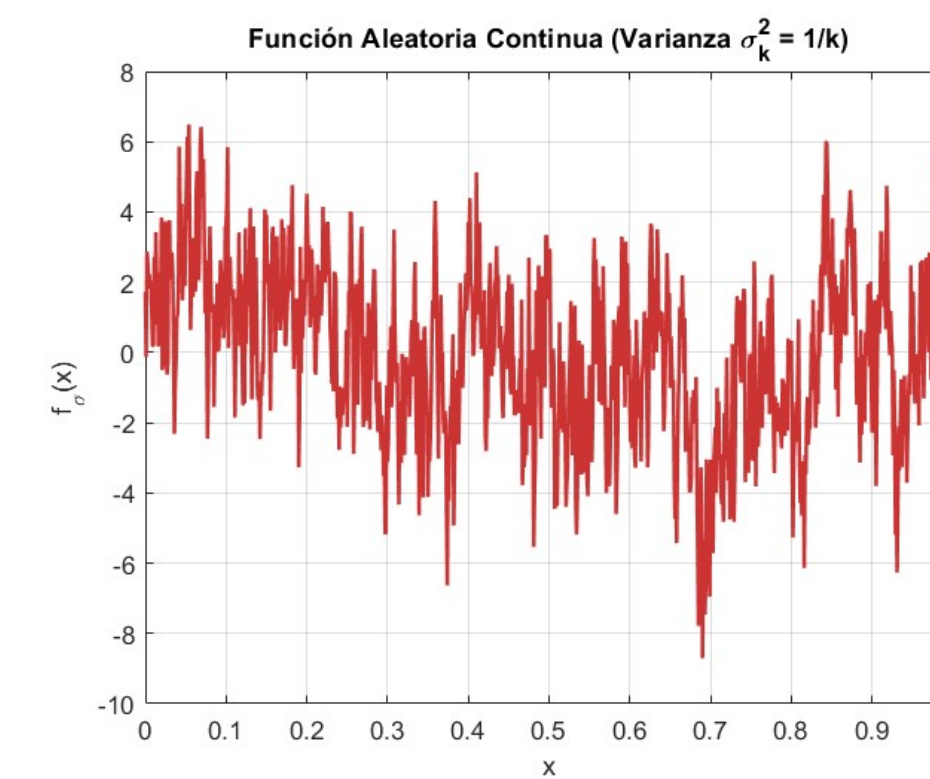
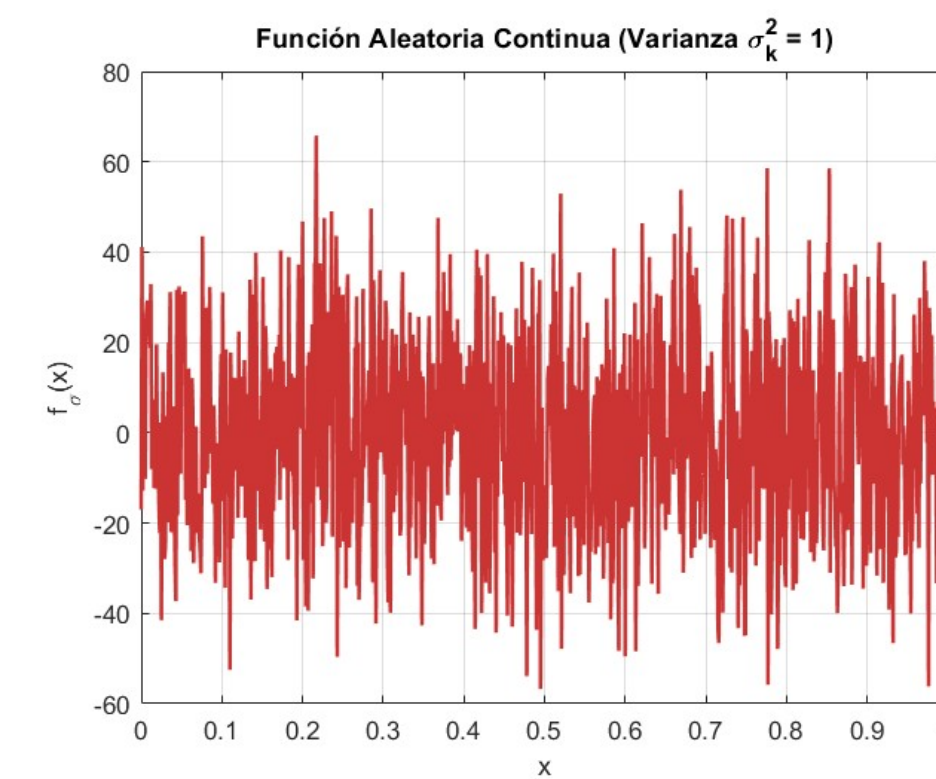
Como se puede observar, la **varianza** es constante (no depende de x), lo que nos indica que es un proceso estacionario y que el error es homogéneo. La **covarianza** nos indica la dependencia lineal que existe entre el valor que toma la función entre dos puntos x e y . Como $E[f_\sigma(x)] = 0$, entonces $Cov[f_\sigma(x), f_\sigma(y)] = E[f_\sigma(x) \cdot f_\sigma(y)]$. Por tanto

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\sigma \cos(kx) + b_k^\sigma \sin(kx)\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^\sigma \cos(my) + b_m^\sigma \sin(my)\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \cos(k(x-y)).$$

Nuevamente dependemos de $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ y además de la distancia $|x - y|$ entre los puntos, lo que nos indica que esta propiedad estadística es invariante ante traslaciones del dominio.

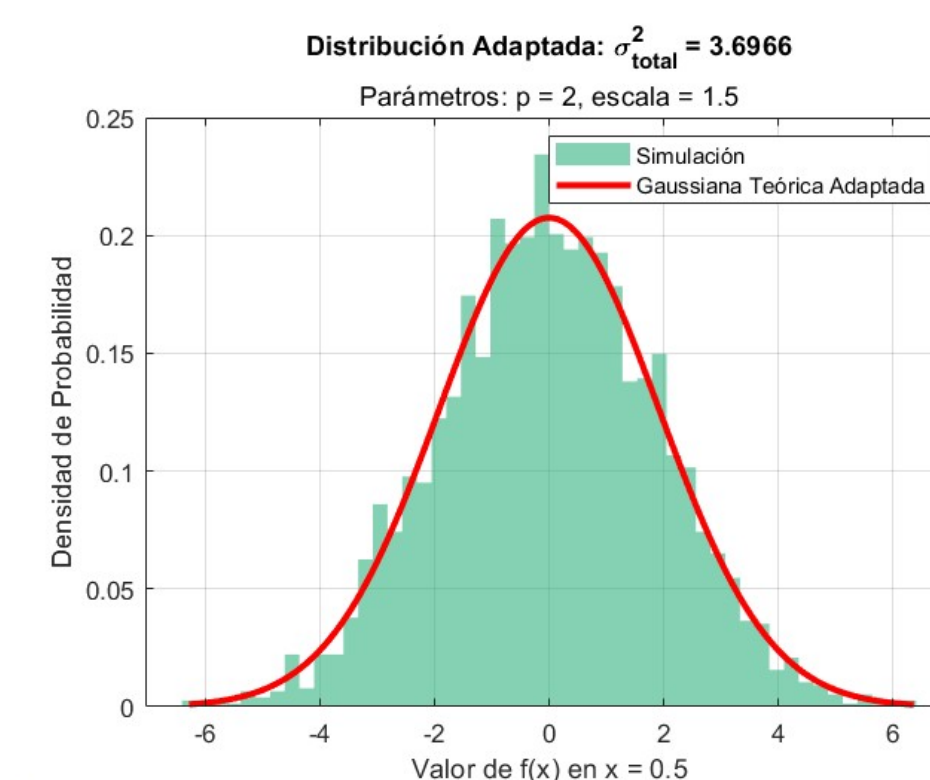
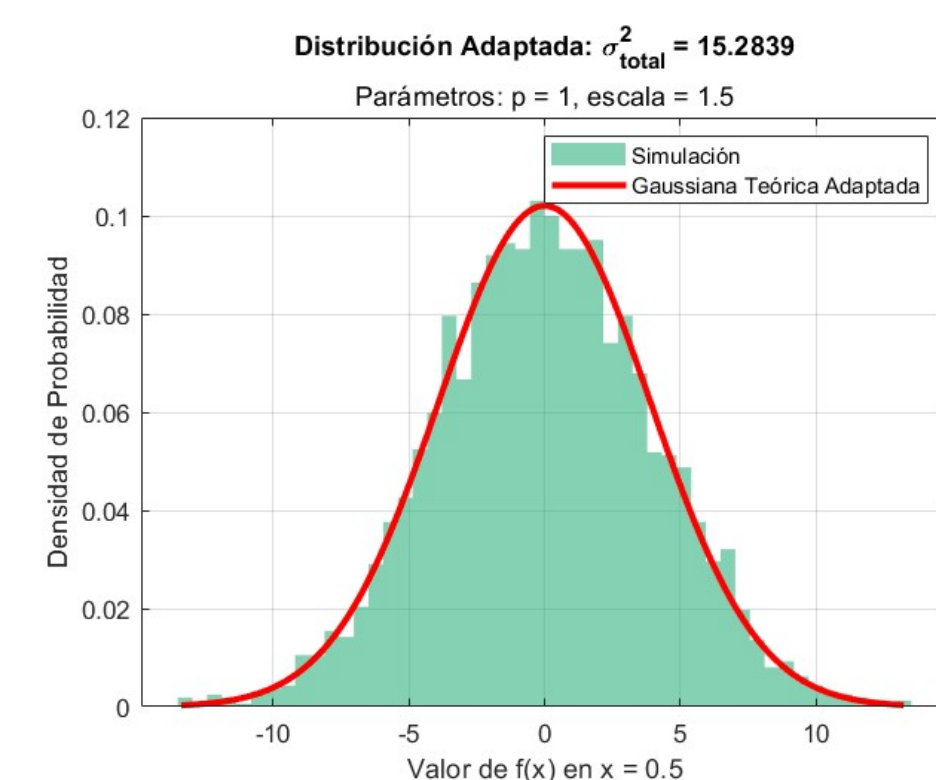
Análisis en función de σ_k^2

Vamos a suponer que la varianza es de la forma $\sigma_k^2 = \frac{1}{k^p}$. Para que la serie pertenezca al espacio de funciones L^2 es necesario y suficiente que la suma de los coeficientes sea finita. Debido a que estamos considerando un proceso de media 0, la condición anterior se traduce a que la suma de las varianzas sea finita.

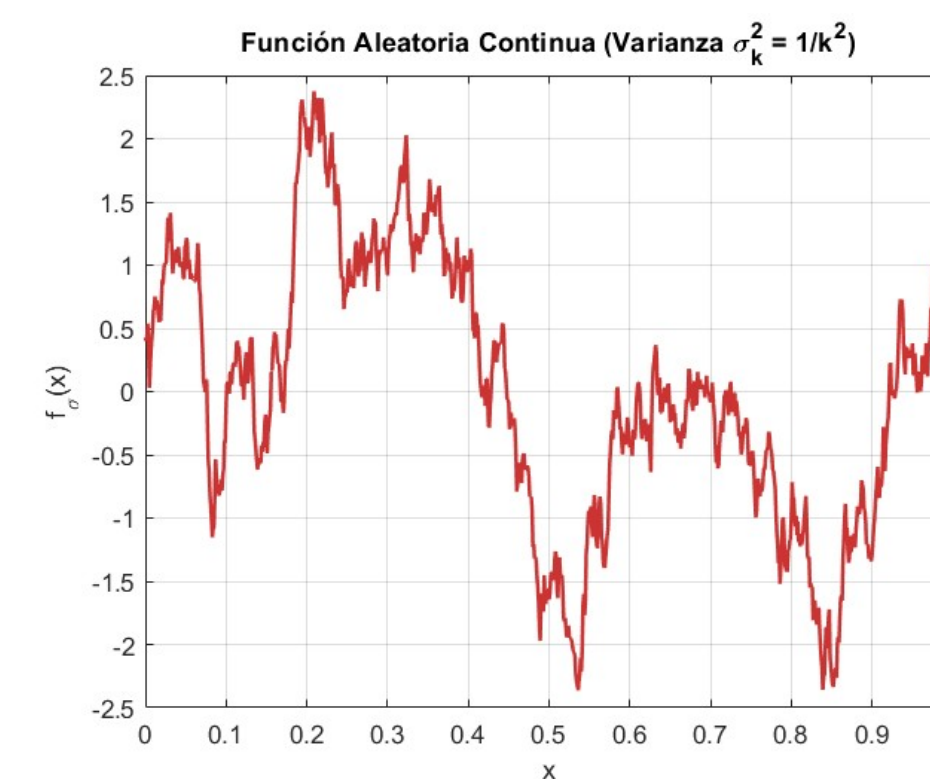
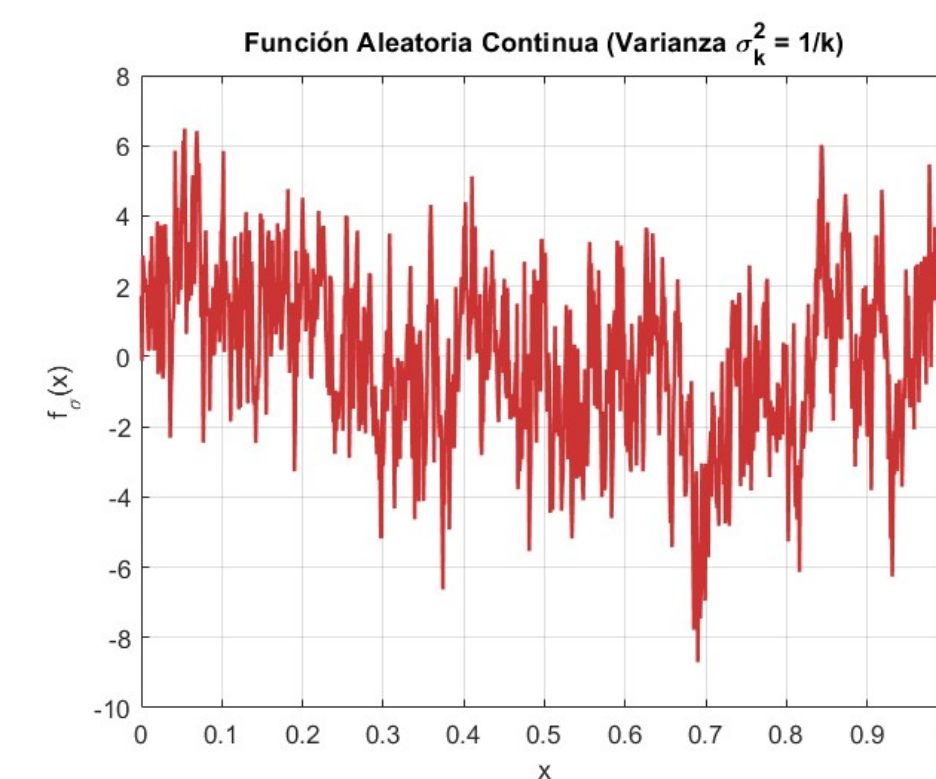


Arriba se muestran los casos $p = 0, p = 1$, en donde se tiene $\sigma_k^2 = 1, \sigma_k^2 = \frac{1}{k}$. Esto implica que la suma de las varianzas diverge, lo cual indica que la función no está en L^2 . Además por el Teorema de Kolmogorov, tampoco son continuas. Este análisis es equivalente para todo p tal que $0 \leq p \leq 1$. Dichas funciones se les denomina **ruido blanco**.

Este ruido se distribuye según la variable aleatoria que determina a los coeficientes. El ruido, por tanto, viene determinado por la sucesión de σ_k^2 . Usando el método de Monte Carlo, se puede simular distintas funciones aleatorias cuyos coeficientes vienen dados por una normal $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$. Fijando un punto y tomando los valores de las distintas funciones en dicho punto, verificamos que la distribución real de estos valores se asemeja a la teórica con la que se eligen los coeficientes.



Se puede observar como aumentando el valor de p , la función se suaviza. La serie dada por la suma de las varianzas converge, y las funciones resultantes tienen mayor regularidad. En concreto para $1 \leq p \leq 3$ las funciones pasan a ser continuas y estar en L^2 . Al aumentar p , los coeficientes cada vez se amortiguan más rápidamente, dando lugar a menos ruido y más parecido a una combinación de funciones trigonométricas.



Aplicación a la ecuación del calor

Consideremos la ecuación del calor en una dimensión cuya condición inicial viene dada por una función aleatoria y cuyas condiciones frontera son periódicas. Físicamente, se puede interpretar como un anillo, cuya temperatura inicial se distribuye de forma aleatoria.

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad t > 0$$

con condiciones de contorno periódicas:

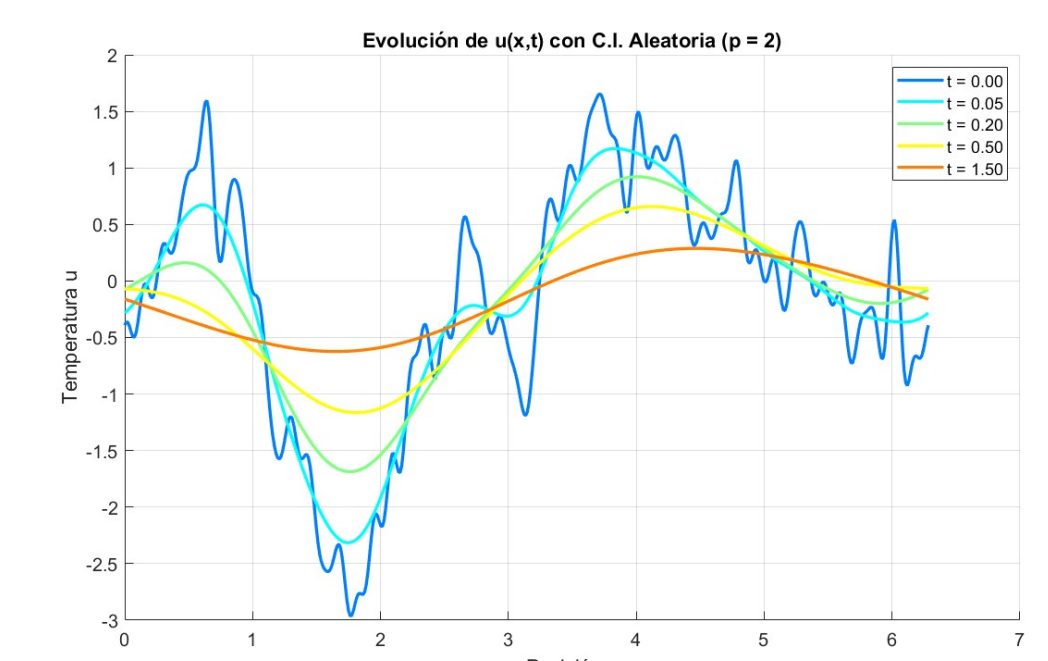
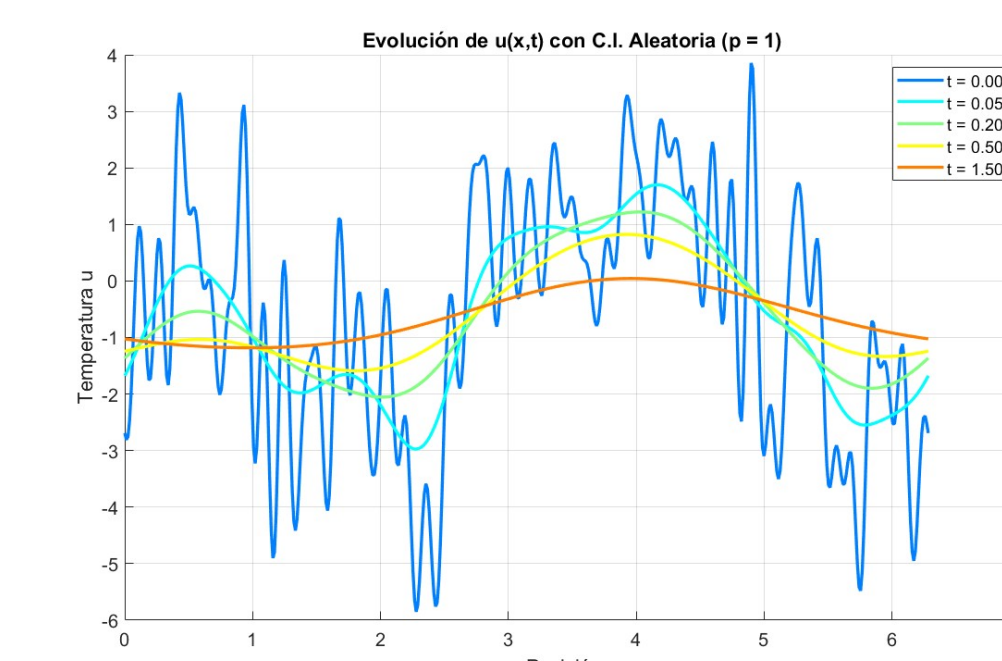
$$u(0, t) = u(2\pi, t), \quad u_x(0, t) = u_x(2\pi, t)$$

Es posible resolver por separación de variables, obteniendo así la solución:

$$u(x, t, \sigma) = \frac{a_0^\sigma}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^\sigma \cos(kx) + b_k^\sigma \sin(kx)] e^{-\alpha k^2 t}$$

Se incluye el término a_0^σ como una variable aleatoria de media cero, la cual representa la temperatura media final de equilibrio del sistema.

Veamos como son las soluciones escogiendo los coeficientes según distribuciones normales $\mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$, con σ_k^2 escogidos según las sucesiones $\frac{1}{k}$ (gráfica de la izquierda), $\frac{1}{k^2}$ (gráfica de la derecha).



En el tiempo $t = 0$ ambas gráficas muestran la condición inicial aleatoria. A partir del momento inicial, la temperatura evoluciona de forma similar en ambos casos, llegando hasta un equilibrio para t suficientemente grande. La diferencia principal entre ambos casos reside en que al coger varianzas mayores, la condición inicial es menos regular y se parece menos a una función trigonométrica. Esto genera que en los instantes iniciales, los picos de ruido se suavicen en hacia la media, lo cual hace que la temperatura se acerque a una solución estacionaria con mayor rapidez.

Conclusión

Estas funciones permiten un acercamiento más real a la modelización de procesos físicos ya que nos permite modelar el desconocimiento de un dato inicial mediante su descomposición en series de Fourier. Hemos comprobado que esta incertidumbre no es aleatoria, si no que depende de la convergencia de la serie de las varianzas.

Cabe destacar que se han probado distintas distribuciones para la elección de los coeficientes. En la práctica, difieren ligeramente en los picos y las formas, pero en esencia acaban representando lo mismo. El teorema central del límite asegura que toda distribución converge a una normal, por lo que para simplificar cálculos, se ha tomado una normal y se han ido probando distintas varianzas.