Ecuación del Calor

Coloma de Lara, Carlos de Miguel y Elena Rodríguez

EDPs 2025-2026

Universidad Politécnica de Madrid

Objetivos

En este trabajo exploraremos la solución fundamental de la ecuación del calor centrándonos en los siguientes puntos:

- La representación de l.a solución en dimensión 1 y dimensión 2
- Ilustrar su carácter auto semejante comparando la solución a diferentes escalas.
- Enseñar la convergencia a la Delta de Dirac cuando $t \to 0$
- Mostrar el decaimiento cuando $t \to \infty$

Representación

La ecuación del calor modela la difusión de la energía térmica a lo largo del tiempo. Su **solución fundamental** describe la evolución de la temperatura en un espacio cuando, en el instante inicial, toda la energía se concentra en un único punto. Con una constante de difusividad térmica k, esta solución viene dada por la ecuación (en $dim = 1$ y $dim = 2$ respectivamente):

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \Phi(x,y,t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4kt}}$$

Asumiremos $k = 1$.

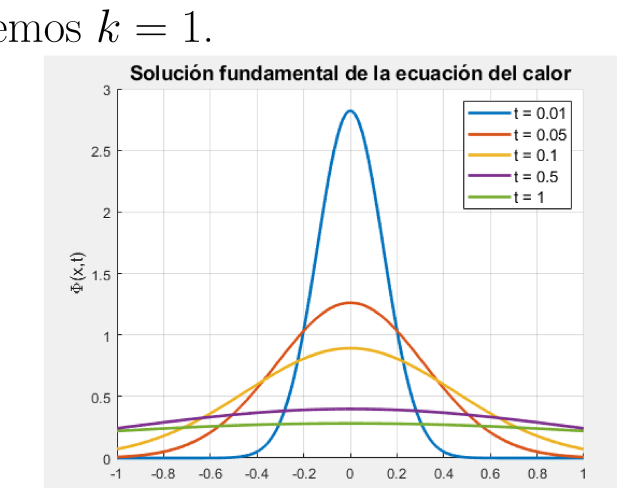


Figure 1:Representación con $x \in [-1, 1]$

Inicialmente la energía térmica está fuertemente concentrada en el origen, generando un pico elevado. Conforme pasa el tiempo, el calor se difunde, aplanando la campana. Físicamente, esto ilustra cómo la temperatura máxima disminuye mientras el área bajo cada curva es constantemente 1, mostrando la conservación de la energía térmica total en el sistema.

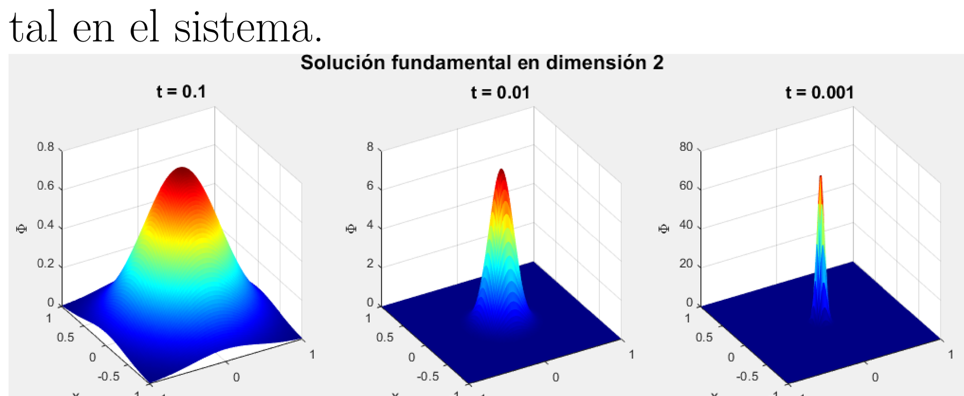


Figure 2:Representación con $(x_1, x_2) \in [-1, 1]^2$

Estas gráficas ilustran la convergencia hacia la **delta de Dirac** en dos dimensiones cuando $t \to 0$. Al observar la evolución hacia tiempos más pequeños, vemos cómo la campana térmica se comprime y su pico de temperatura se dispara en el origen. Esta evolución visualiza el límite puntual: la función tiende a infinito en el centro y a cero en el resto del espacio. Físicamente, representa toda la energía térmica del sistema concentrándose en un único punto.

Carácter autosemejante de la solución

Una solución es autosemejante cuando geométricamente tiene la misma forma (solo se estira o se encoge) en el tiempo. Es decir, si tomas la solución en $t = 1$ y en $t = 4$ haces zoom en el eje vertical y deszoom en el horizontal, ambas curvas serán idénticas. Esto es muy útil, ya que si sabes la solución en un tiempo, sabes lo que pasará en cualquier tiempo futuro.

Para demostrarlo, vamos a usar un cambio de variable en el que combinemos el espacio y el tiempo:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Aplicando el cambio a la solución fundamental en dimensión 1 tenemos:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}\sqrt{t}} e^{-\frac{\eta^2}{4k}}.$$

Separando las partes dependientes de t del resto nos queda:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-\frac{\eta^2}{4k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\eta).$$

Vemos que si hacemos el cambio de variable, la solución solo depende de t en el factor $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Por lo que al representar las soluciones, el tiempo solo altera su escala.

Si en vez de representar las soluciones respecto a x y $\Phi(x,t)$ las representas como $\Phi\sqrt{t}$ frente a $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$, nos queda una única curva a la que colapsan todas:

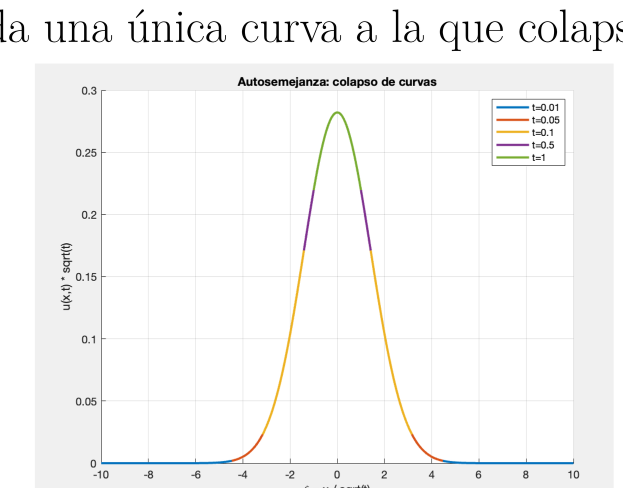


Figure 3:Representación con el cambio de variable de las soluciones de la Figura 1

Esto mismo se puede hacer también para las soluciones en dimensión 2. En este caso, el cambio de variable sería

$$\eta' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{t}}.$$

Aplicando este cambio, la solución quedaría como:

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{4\pi k} e^{-\frac{\eta'^2}{4k}}\right) = \frac{1}{t} f(\eta').$$

Para observar la gráfica a la que colapsan, tenemos que representar Φt frente a η'.

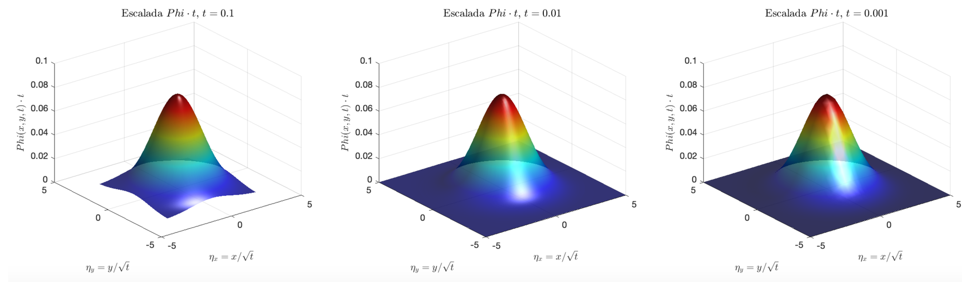


Figure 4:Representación con el cambio de variable de las soluciones de la Figura 2

Convergencia a la Delta de Dirac

La delta de Dirac δ es una distribución que se caracteriza por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\gamma(x)dx = \gamma(0)$$

Intuitivamente, puede interpretarse como una función que es nula fuera del origen y concentra toda su masa en $x = 0$ y verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Ahora veremos que la solución fundamental converge a la delta de Dirac. Primero vamos a ver la convergencia puntual para ver que en todo punto menos en el origen la solución es 0 cuando $t \to 0$. Si $x \neq 0$, la solución fundamental la podemos dividir en dos partes:

$$\Phi(x,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\right)\left(e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right).$$

Al hacer el límite cuando $t \to 0$ en cada una de las partes tenemos que la primera tiende a ∞ y la segunda a 0. Como la exponencial gana a las raíces, la función decae más rápido de lo que crece y por tanto tiende a 0.

Si $x = 0$, la parte exponencial tiende a 1 mientras que $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}$ sigue tendiendo a ∞. Por lo tanto, el límite en este punto es infinito.

Como δ es una distribución (no una función de valores reales) y concentra una integral de valor 1 en un conjunto de medida cero, entonces $\delta \notin L_1$ y por tanto no hay convergencia en L_1; pero la solución fundamental converge a δ en distribuciones. Para ello debemos ver que la integral de la solución cuando $t \to 0$ es 1. Tendremos que usar el cambio de variable.

$$z = \frac{x}{\sqrt{4kt}} \Rightarrow dx = \sqrt{4kt}dz.$$

Aplicando este cambio de variable a la solución fundamental obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1,$$

donde la última igualdad viene dada por la integral de Gauss.

En la norma L_2, la solución fundamental no converge porque no pertenece a este espacio de funciones. Un objeto de L_2 debe cumplir que sea de cuadrado integrable. Veamos que $\Phi(x,t)$ no lo es y que por tanto no se cumple la convergencia:

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx = \frac{1}{4\pi t} * \sqrt{2\pi t} = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}.$$

Si tomamos $t \to 0$ da ∞ por lo que no es de cuadrado integrable y no converge en L_2.

Finalmente vamos a ilustrar esta convergencia utilizando un mapa de calor que hemos obtenido en Matlab. En esta representación, el eje horizontal indica la posición (x) y el vertical el avance del tiempo (t). El instante inicial $t = 0$ se manifiesta como un punto de intensidad máxima en el origen. Esta singularidad visual encarna a la perfección el límite puntual de la delta de Dirac: toda la energía térmica se halla infinitamente concentrada en un único punto matemático antes de comenzar a difundirse y expandirse por el espacio.

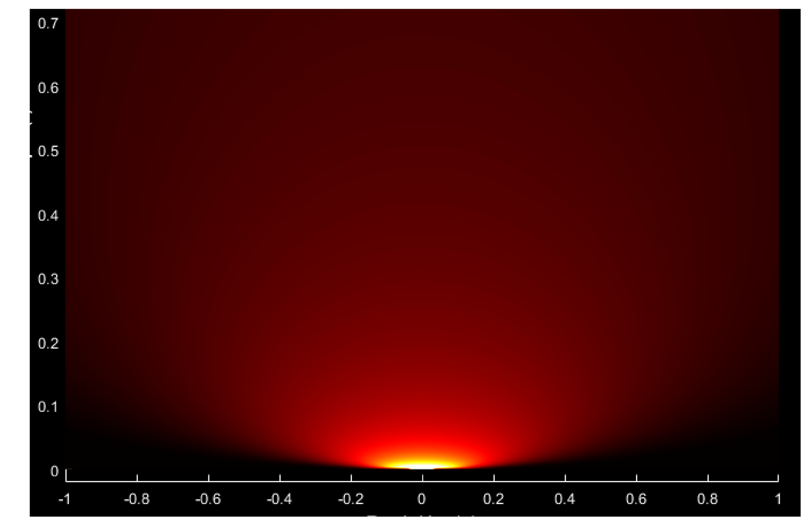
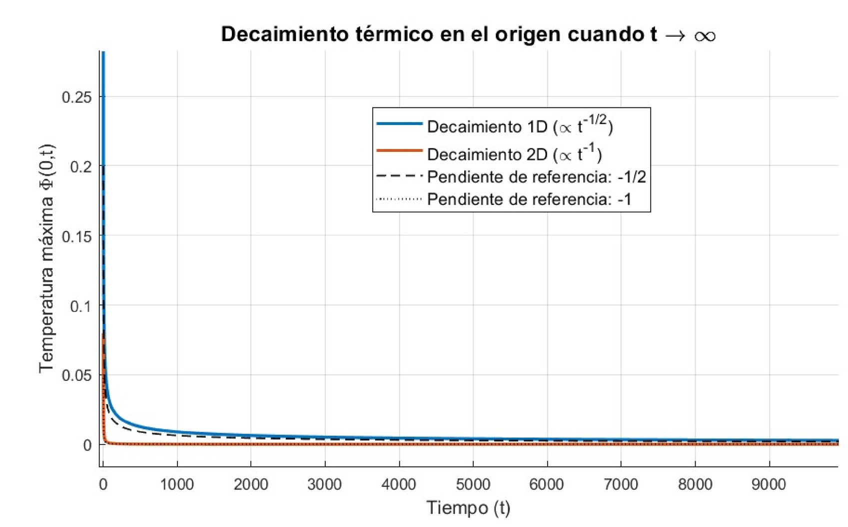


Figure 5:Mapa de calor

Ilustración del decaimiento cuando $t \to \infty$

Evaluamos la altura máxima (el punto más caliente es siempre el origen, $x = 0$) para estudiar el comportamiento de la ecuación en el infinito. En dimensión 1, el máximo se mide con $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$. Es decir, la temperatura decae proporcionalmente a $t^{-1/2}$. En 2 dimensiones, la altura máxima es $\frac{1}{4\pi t}$. El decaimiento es proporcional a t^{-1}.



A continuación estudiamos el decaimiento en las normas L^1 y L^2. En L^1, el valor no decae. Como la energía térmica se conserva, la norma L^1 se mantiene en 1 para siempre, incluso cuando $t \to \infty$. El área no desaparece, solo se reparte. La norma L^2 (y cualquier otra norma L^p para $p > 1$) sí decae hacia 0 a medida que la curva se achata. En la gráfica podemos ver cómo la integral de la función al cuadrado se acerca asintóticamente al eje horizontal.