



INTRODUCCIÓN

Hasta ahora, hemos trabajado con series de Fourier de forma determinista. A partir de una función $f(x)$, se tiene su serie de Fourier en un intervalo $[-L, L]$,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

En vez de, dada una f , calcular sus coeficientes, podemos usar variables aleatorias y obtener una función aleatoria f_σ mediante la serie de Fourier, donde σ será el vector de coeficientes de la serie generado. Estudiaremos cuestiones relacionadas con estas funciones, tomando coeficientes como variables aleatorias iid. Nos centraremos en explorar probabilísticamente la serie con coeficientes normales, y usaremos simulaciones para visualizar los resultados.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sean $A_0, A_n, B_n \equiv N(0, 1)$ con $n \in \mathbb{N}$. Definimos, con estas variables aleatorias como coeficientes en la serie de Fourier, la función aleatoria

$$f_\sigma(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Veamos cómo se comporta una serie aleatoria (con $L = \pi$) a medida que aumentamos el número de términos:

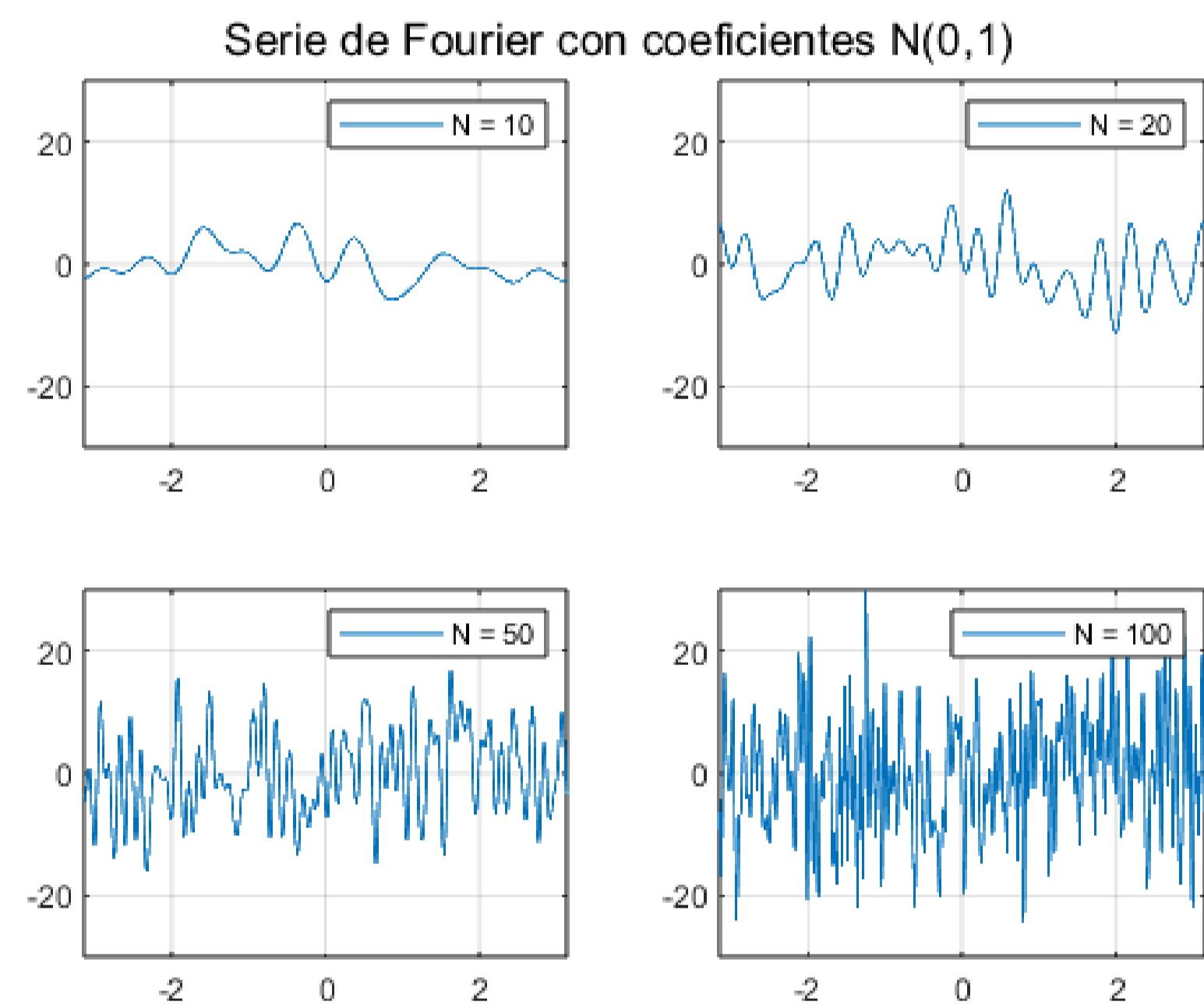


Figura: Serie de Fourier con coeficientes $N(0,1)$ para 10, 20, 50 y 100 términos (Código 1)

Simetría en un punto

Observando las gráficas, es natural preguntarse lo siguiente: si tomamos un punto cualquiera $x_0 \in [-L, L]$, ¿es igual la probabilidad de que el valor $f_\sigma(x_0)$ sea mayor que 0, que la de que sea menor que 0? Es evidente que

$$A_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \equiv N(0, 1).$$

Es decir, la imagen de cada x_0 se aproxima a una suma infinita de normales $N(0, 1)$, que es simétrica. Por tanto, la probabilidad de que $f_\sigma(x_0)$ sea mayor que 0, es efectivamente igual a la probabilidad de que sea menor.

Simetría en un intervalo

Ahora queremos ver si esto ocurre también para un intervalo. Vemos que para todo f_σ estrictamente positiva, tendremos $-f_\sigma$, que será estrictamente negativa. Ver que la probabilidad de estas dos series es la misma es tan fácil como ver que la probabilidad de tener σ y $-\sigma$ es la misma por simetría de la distribución.

Cabe destacar que en este caso la probabilidad no será $\frac{1}{2}$ ya que,

$$\mathbb{P}(f_\sigma(x) = 0, x \in [-L, L]) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1$$

\iff

$$\mathbb{P}(f_\sigma(x) > 0, \forall x \in [-L, L]) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

Para verlo gráficamente haremos una estimación numérica usando el método Monte Carlo:

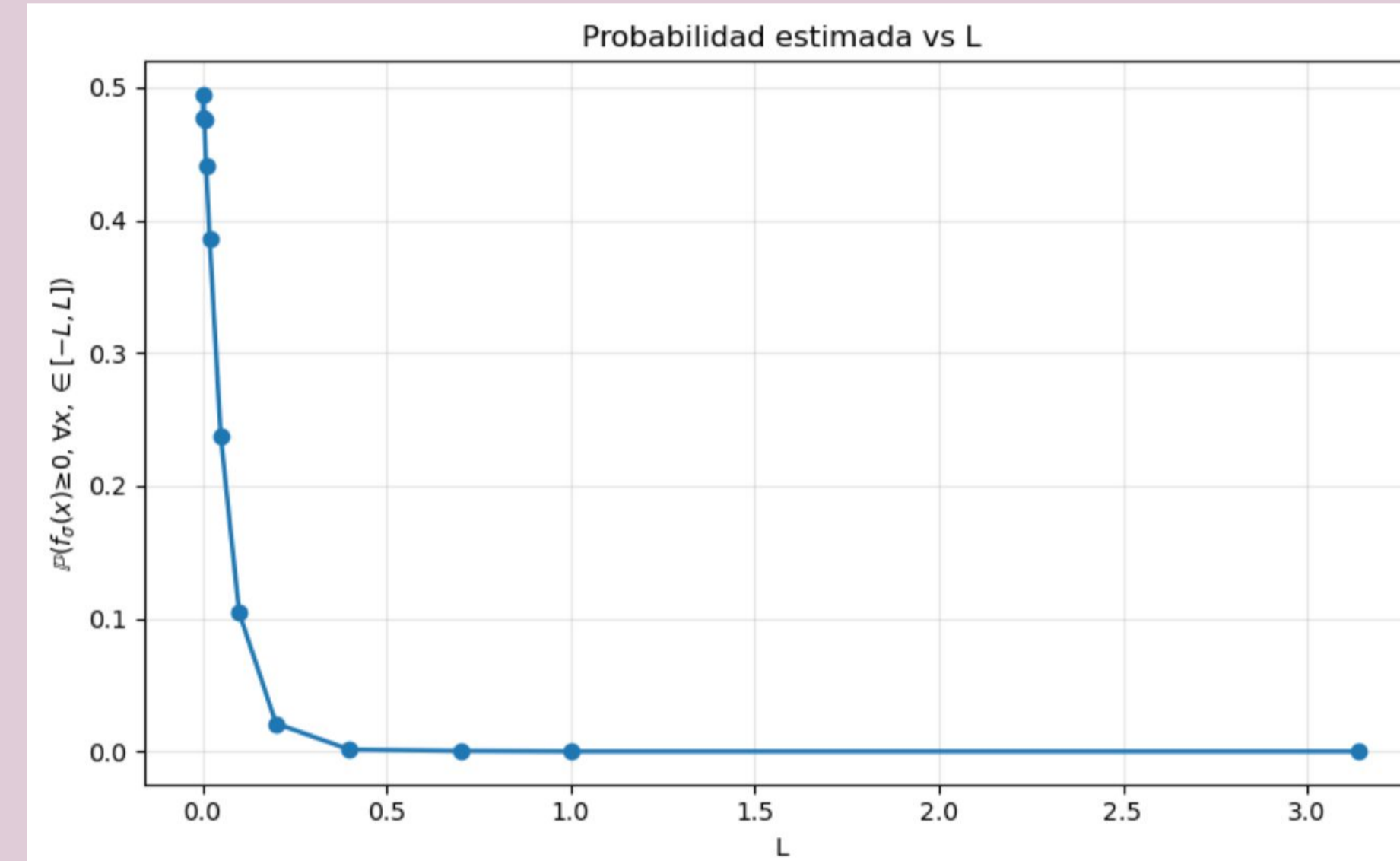


Figura: Probabilidad de que f sea positiva con distintas longitudes de intervalo (Código 2)

Esperanza, varianza y covarianza para coeficientes $N(0,1)$

Sería interesante calcular también los momentos básicos puntualmente, para $x \in [-L, L]$

$$\mathbb{E}[f_\sigma(x)] = \mathbb{E}\left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = 0$$

$$\text{Var}(f_\sigma(x)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\text{Cov}(f_\sigma(x), f_\sigma(y)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x - y)\right)$$

Mirando las gráficas de la serie de Fourier con coeficientes $N(0,1)$, por un lado, se ve la simetría por la esperanza cero, lo cual ya hemos explorado; y por otro lado, a medida que crece el número de términos, se ve claramente que la gráfica se dispersa más en el eje y, signo de que ha aumentado la varianza puntual. Con el cálculo realizado, se ve que la varianza tiende a infinito al tomar coeficientes $N(0,1)$.

Debido a esto, podemos tomar el objetivo de que la serie converga razonablemente, lo que nos lleva a introducir pesos ω_n :

$$f_\sigma(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

con la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 < \infty.$$

Esperanza, varianza y covarianza para coeficientes con pesos

Fijando $x \in [-L, L]$, (manteniendo que $\mathbb{E}[A_0] = \mathbb{E}[A_n] = \mathbb{E}[B_n] = 0$),

$$\mathbb{E}[f_\sigma(x)] = 0$$

$$\text{Var}(f_\sigma(x)) = \text{Var}(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 = \omega_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 < \infty$$

$$\text{Cov}(f_\sigma(x), f_\sigma(y)) = \omega_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x - y)\right).$$

Ejemplo: $\omega = 1/n, 1/n^2$

Como ejemplo, podemos visualizar $A_0, A_n, B_n \equiv N(0, 1/n)$ o $A_0, A_n, B_n \equiv N(0, 1/n^2)$.

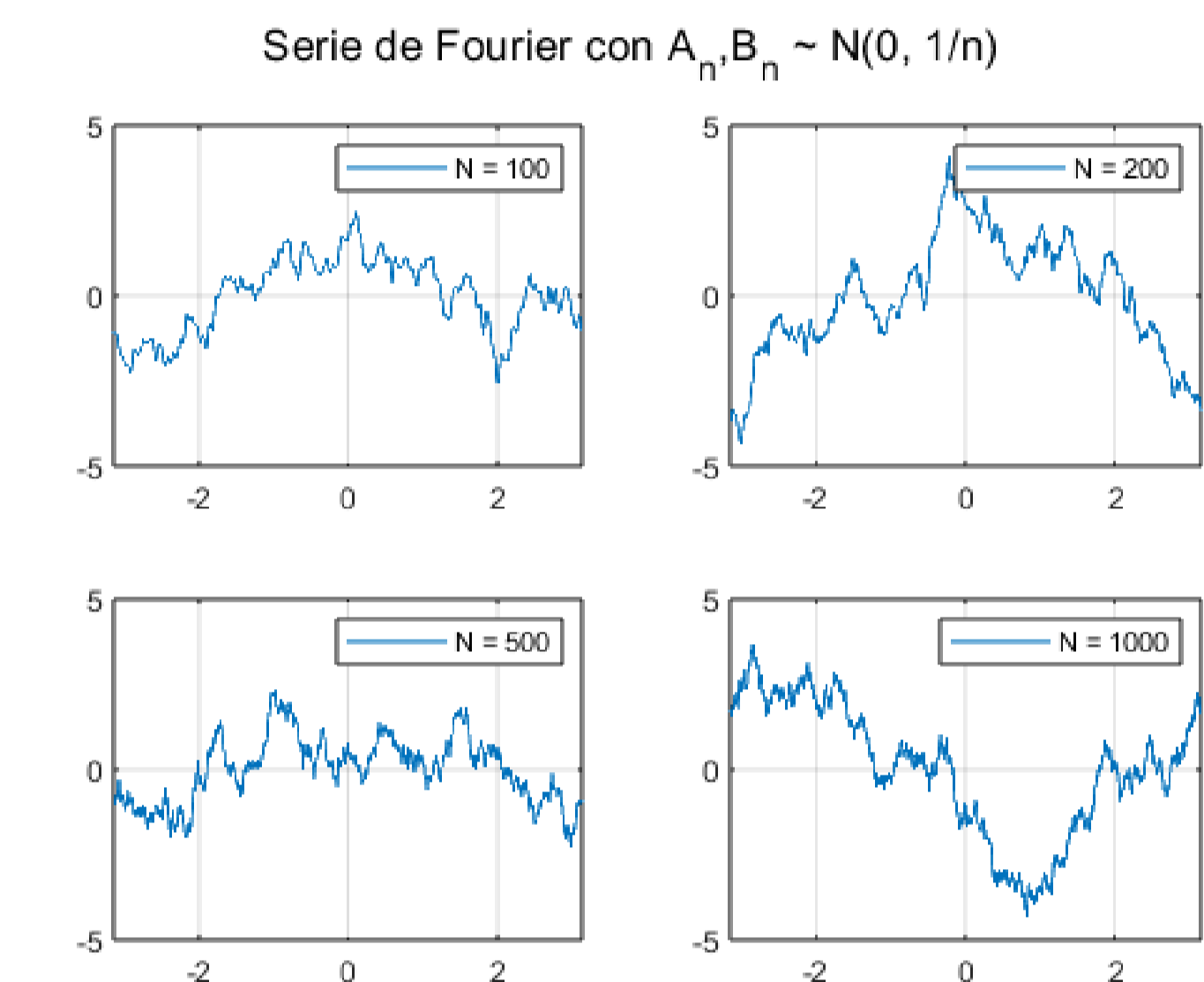


Figura: Serie de Fourier con coeficientes $N(0, 1/n)$ para 100, 200, 500 y 1000 términos (Código 3)

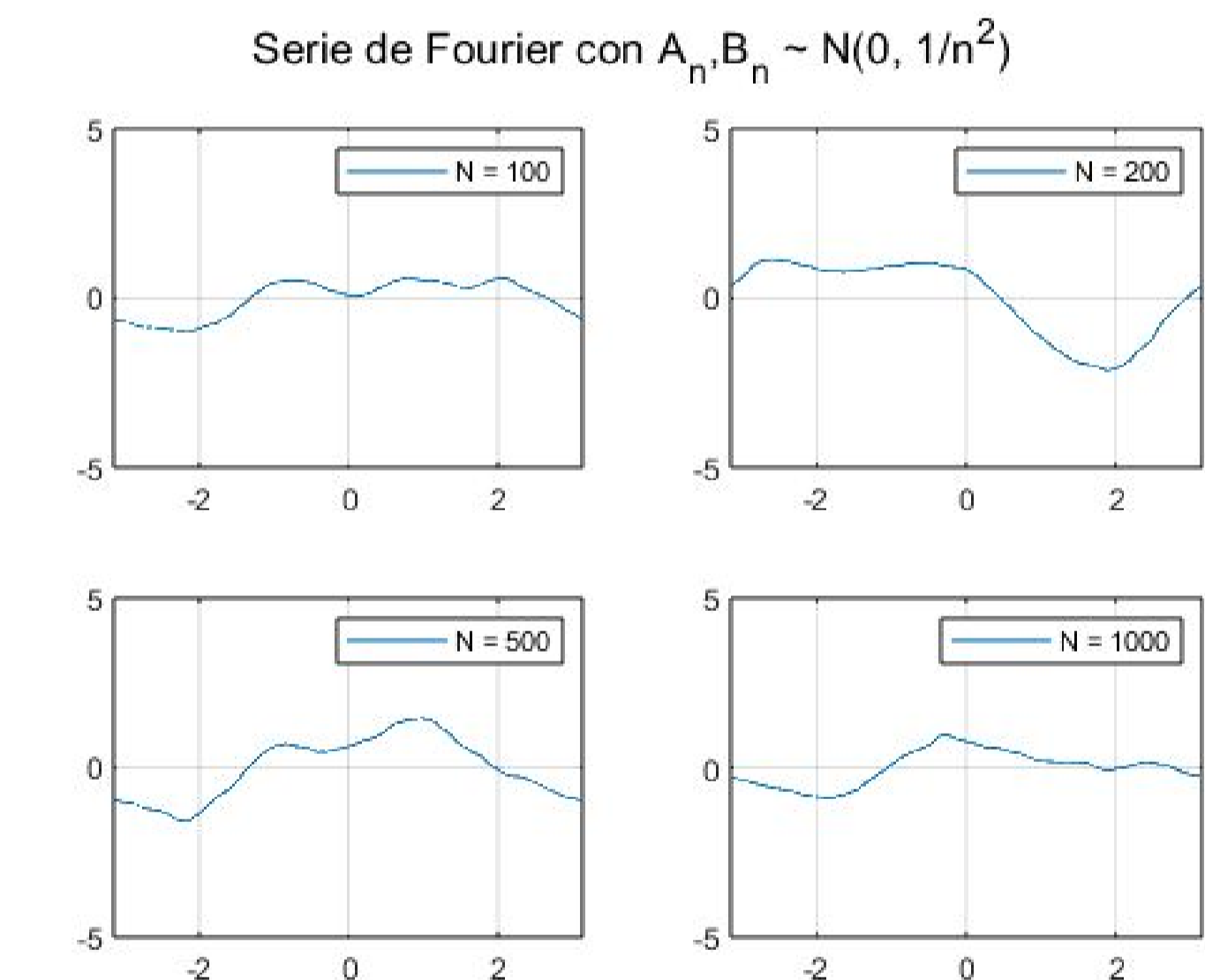


Figura: Serie de Fourier con coeficientes $N(0, 1/n^2)$ para 100, 200, 500 y 1000 términos (Código 4)

CONCLUSIÓN

El estudio de series de Fourier con coeficientes provenientes de variables aleatorias muestra resultados interesantes y une la rama de la probabilidad con el análisis. Tras estudiar coeficientes que siguen distribuciones normales, podemos forzar características en nuestra función aleatoria tales como la simetría o la convergencia o suavidad. Algunas ampliaciones posibles para este proyecto pasan por el estudio de otras distribuciones, especialmente con condiciones de simetría distintas.