UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
POLITÉCNICA

DERIVADA E INTEGRAL DE UNA SERIE DE FOURIER

Adrián Nieto, Mario Alonso, Matías Martínez

Teoría a comprobar

Dada la base trigonométrica definida en el espacio $\Omega = (-\pi, \pi)$

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

el objetivo es determinar bajo qué condiciones podemos aproximar la derivada y la integral de una función f mediante la derivada e integral de su serie de Fourier:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Caso de la derivada

Para poder intercambiar derivada y serie de Fourier es necesario que

$$f \in L^2(-\pi,\pi) \quad \text{y} \quad f' \in L^2(-\pi,\pi).$$

Si ocurre esto decimos que $f \in H^1$ (espacio de Sobolev). Su derivada sería

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)\right).$$

Caso de la integral

Para integrar término a término basta con que

$$f \in L^2(-\pi,\pi).$$

Entonces la primitiva de f será

$$F(x) \sim a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\sin(nx) - \frac{b_n}{n}\cos(nx)\right).$$

La función signo

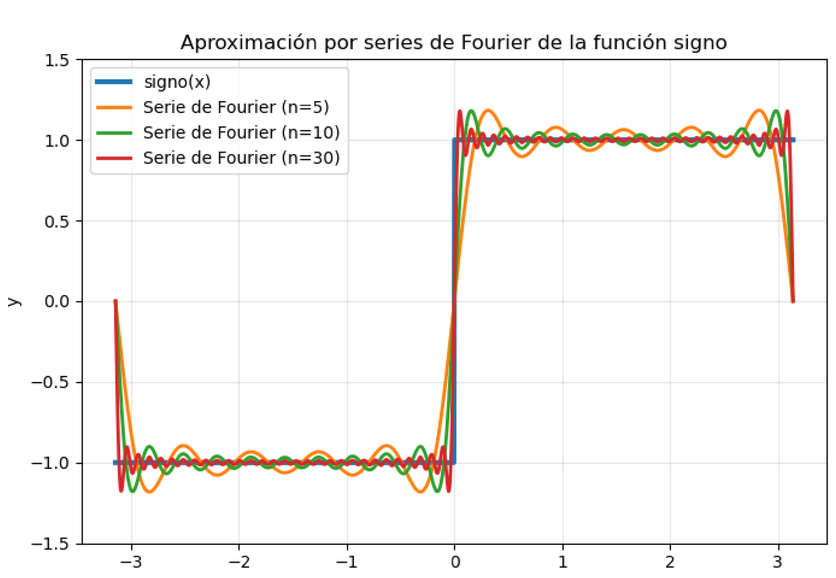
Definimos la función signo en $(-\pi, \pi)$ como:

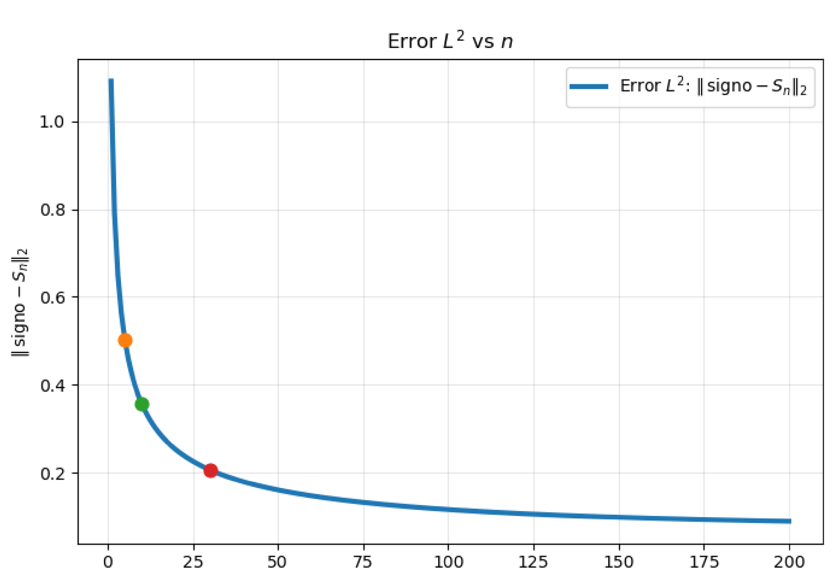
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

una función discontinua en $x = 0$, perteneciente a $L^2(-\pi,\pi)$. Su serie de Fourier viene dada por

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

Graficándolas a ellas y a su error obtenemos





Observamos que los coeficientes de Fourier decaen como $\frac{1}{n}$, lo que refleja la baja regularidad de la función. Este comportamiento anticipa que la derivación término a término puede no estar justificada mientras que la integración sí.

La derivada

La derivada de la función signo es

$$(\operatorname{sgn})'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad (\operatorname{sgn})'(0) \text{ no está definida.}$$

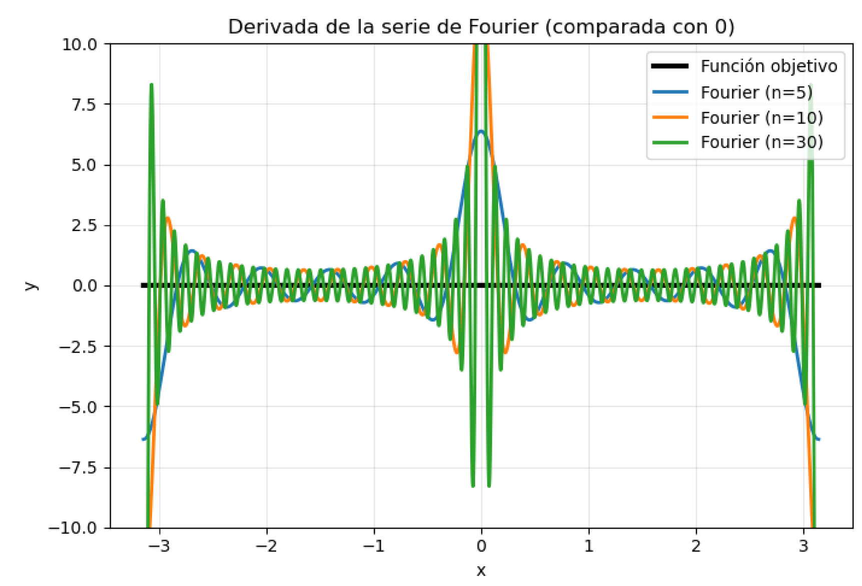
Por otro lado, la derivada de cada término de su serie es

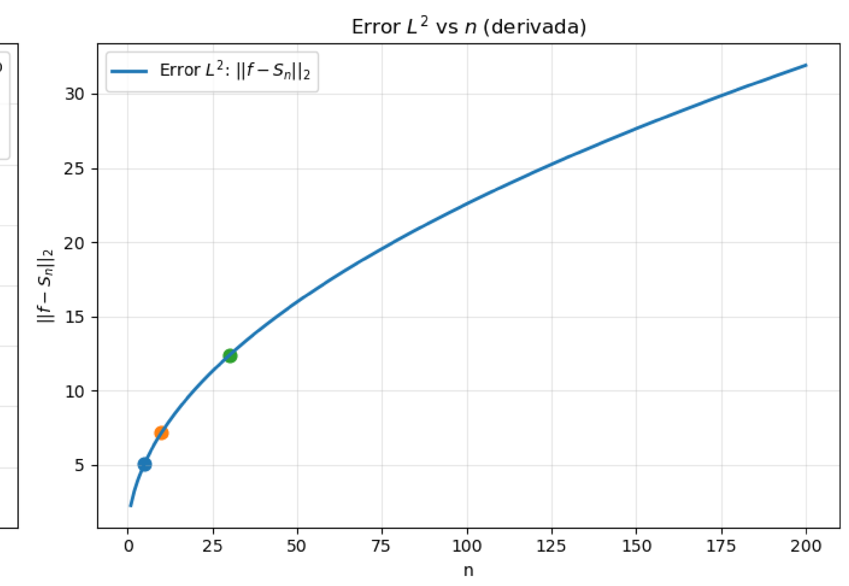
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\right) = \cos((2n+1)x).$$

Si suponemos que $sgn'(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces podríamos escribir su derivada como

$$sgn'(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \cos((2n+1)x).$$

Graficamos para poder ver si converge o no:





Se observa claramente que en 0 no aproxima bien a la función. Mientras que los coeficientes de Fourier de $sgn(x)$ eran

$$a_n = b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}; \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

los de $(sgn)'(x)$ son

$$a_n' = b_{2n}' = 0, \quad b_{2n+1}' = (2n+1)b_{2n+1} = \frac{4}{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando la identidad de Parseval vemos que

$$\|sgn'\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2|b_{2n+1}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \infty,$$

lo que contradice que $sgn'(x) \in L^2$. Por tanto, la función signo no pertenece al espacio de Sobolev y esto es suficiente para afirmar que no se puede justificar la derivación de su serie.

La integral

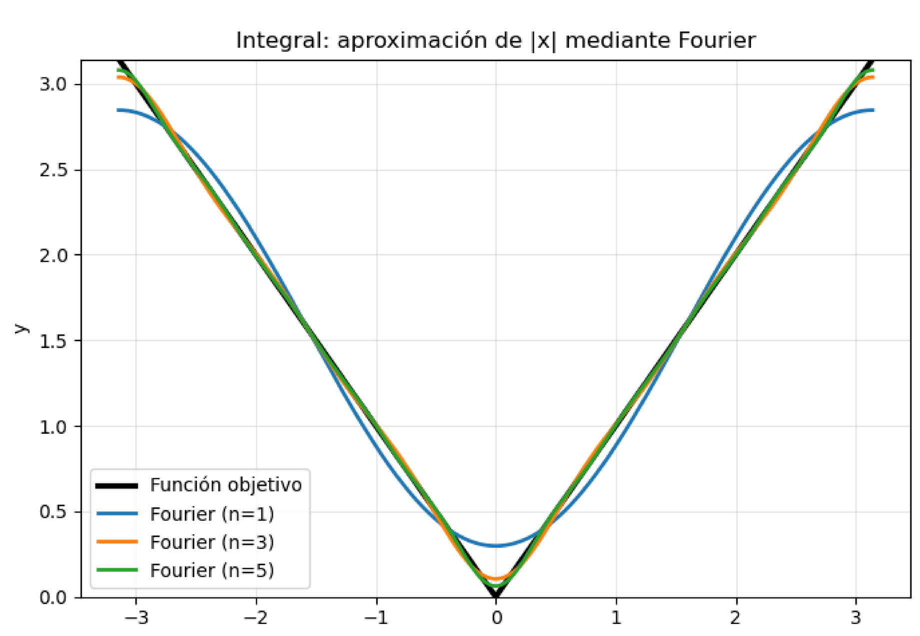
Integrando la función signo obtenemos la función valor absoluto

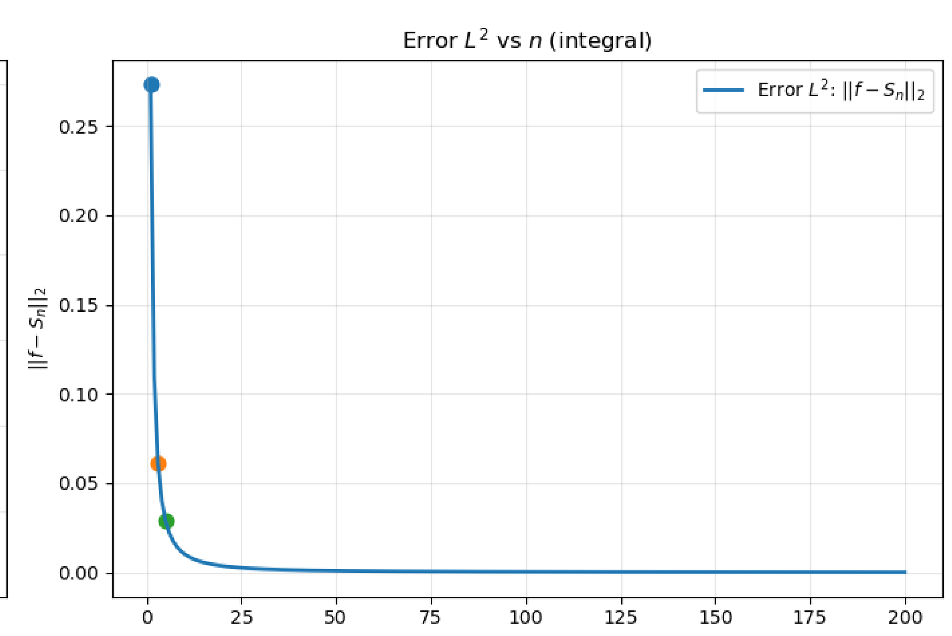
$$\int sgn(x)\,dx = |x| + c.$$

Por otro lado, la inetgral de cada términos de la serie es

$$\int \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\,dx = -\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Graficamos para poder ver si converge o no:





Observamos que, efectivamente, converge y además su error disminuye muy rápidamente para n razonablemente pequeño. Sus coeficientes de Fourier son

$$a_n'' = b_{2n}'' = 0, \quad b_{2n+1}'' = \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)} = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}; \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

Por la identidad de Parseval,

$$\|sgn\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|b_{2n+1}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} < \infty.$$

Por lo tanto se puede aproximar por una sucesión de Fourier, cuyos coeficientes hemos calculado anteriormente.

¿Por qué?

El hecho de que a la derivada se le apliquen más restricciones que a la integral, es una consecuencia directa de los coeficientes de Fourier; mientras que en la derivada multiplicamos cada vez por n (lo que empeora la convergencia), en la integral dividimos, lo que la mejora considerablemente. Esto se traduce a que la integral es más suave que la función original dándole una clase más de diferenciabilidad. Y la derivada la hace más tosca, en el sentido en el que le quita regularidad hasta el punto que una serie de Fourier no la puede aproximar.