

## CONCEPTOS GENERALES

### RELACIÓN CON CARTESIANAS

Las coordenadas parabólicas cilíndricas  $(u, v, z)$ , pasan a cartesianas mediante:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u^2 - v^2}{2} \\ x_2 = uv \\ x_3 = z \end{cases} \quad \text{Con dominio:} \quad \begin{cases} 0 < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

### LÍNEAS COORDENADAS EN CARTESIANAS

Sustituyendo la variable correspondiente por el parámetro tiempo se obtienen:

$$\gamma_u(t, v, z): (x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{t^2 - v^2}{2}, tv, z \right)$$

$$\gamma_v(u, t, z): (x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{u^2 - t^2}{2}, ut, z \right)$$

$$\gamma_z(u, v, t): (x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{u^2 - v^2}{2}, uv, t \right)$$

### CAMPOS DE VELOCIDAD

Derivando cada línea coordenada respecto al tiempo obtenemos:

$$\gamma'_u = u\vec{i} + v\vec{j} \quad \gamma'_v = -v\vec{i} + u\vec{j} \quad \gamma'_z = \vec{k}$$

### VECTORES UNITARIOS TANGENTES A LAS LÍNEAS

Son los campos de velocidad divididos por su norma

$$\vec{e}_u = \frac{\gamma'_u}{h_u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (u\vec{i} + v\vec{j}) \quad \vec{e}_v = \frac{\gamma'_v}{h_v} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (-v\vec{i} + u\vec{j}) \quad \vec{e}_z = \frac{\gamma'_z}{h_z} = \vec{k}$$

### MATRICES DE CAMBIO DE BASE

Las matrices de cambio de base  $Q$  y  $Q^{-1}$  nos permiten transformar las coordenadas de un vector de una base a otra.

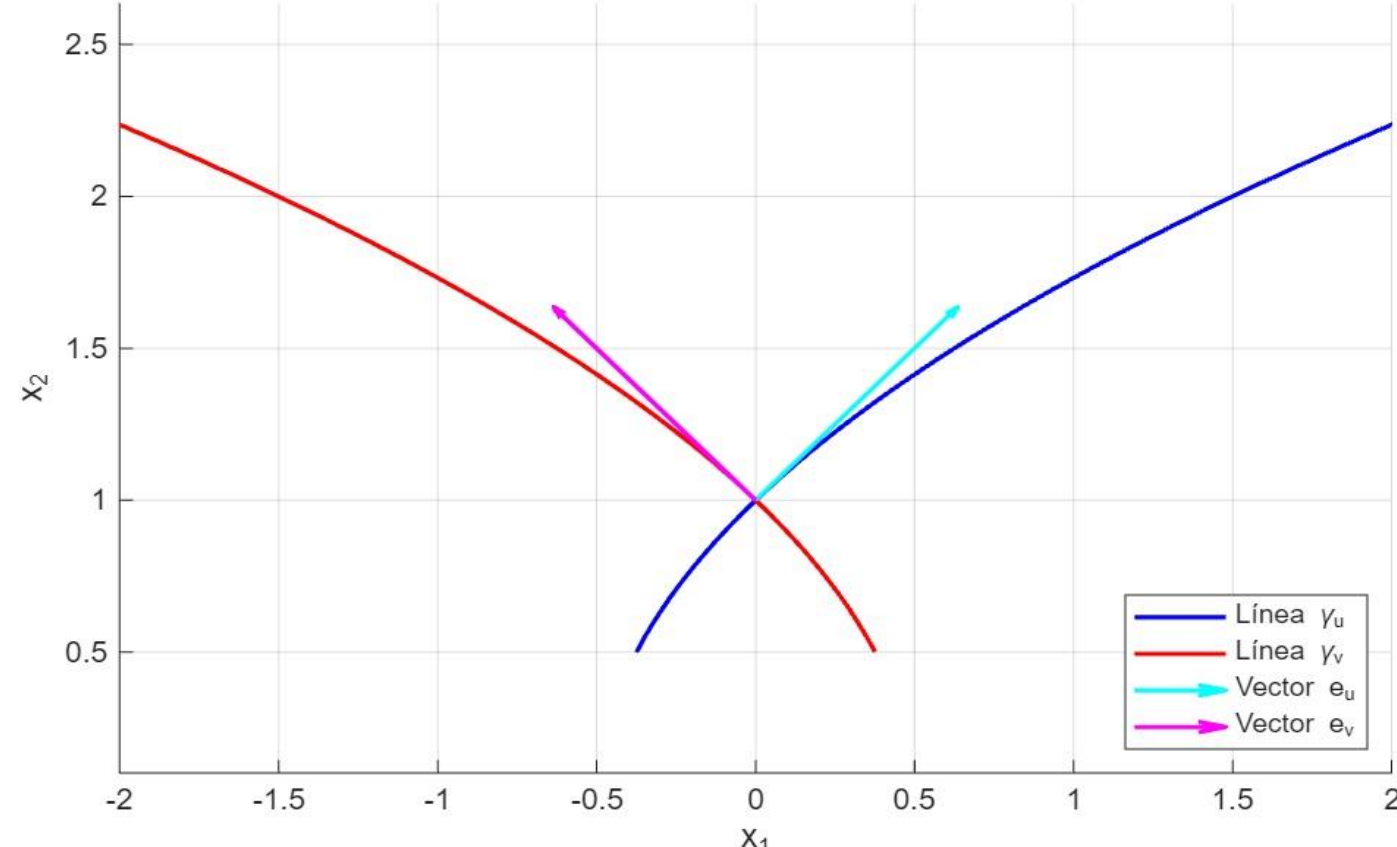
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### CAMPO DE POSICIÓN

Aplicando  $Q^{-1}$  al vector  $(x_1, x_2, x_3)$  en la base cartesiana:

$$\vec{r}(u, v, z) = \frac{u^3 + uv^2}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{e}_u + \frac{u^2v + v^3}{2\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{e}_v + z\vec{e}_z$$

Vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas



## OPERADORES VECTORIALES

### GRADIENTE

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{1}{h_u} \vec{e}_u + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{1}{h_v} \vec{e}_v + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{h_z} \vec{e}_z$$

$$\nabla f(P) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_v$$

La expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas parabólicas nos permite hallar el gradiente de una función escalar aplicado a un punto.

### DIVERGENCIA

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{h_u h_v h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_z r_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_z r_v) + \frac{\partial}{\partial z} (h_u h_v r_z) \right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u^3 + uv^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u^2v + v^3}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} ((u^2 + v^2)z) \right) = 3$$

Para el caso del campo vectorial posición, su divergencia es igual a la dimensión del espacio vectorial.

### ROTACIONAL

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_z} \begin{vmatrix} h_u \cdot \vec{e}_u & h_v \cdot \vec{e}_v & h_z \cdot \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u \cdot F_u & h_v \cdot F_v & h_z \cdot F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\mathbf{r}) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{vmatrix} \sqrt{u^2 + v^2} \vec{e}_u & \sqrt{u^2 + v^2} \vec{e}_v & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}(u^3 + uv^2) & \frac{1}{2}(v^3 + u^2v) & z \end{vmatrix} = 0$$

Al ser un campo conservativo, el rotacional es 0, irrotacional.

## SUPERFICIES Y CURVATURA

### EJEMPLOS DE SUPERFICIES Y SUPERFICIES REGLADAS

Una superficie de nivel se define, para un campo escalar  $f$ , aplicado en un punto genérico  $P(u,v,z)$  como:

$$S_c = \{P \in \mathbb{R}^3 | f(P) = c\}$$

Es decir, igualamos el campo escalar a una constante  $c$ , dando:

$$\begin{aligned} f_1(u, v, z) &= u = c \\ f_2(u, v, z) &= v = c \\ f_3(u, v, z) &= z = c \end{aligned}$$

La matriz de la cuádrica nos ayuda a clasificar la superficie

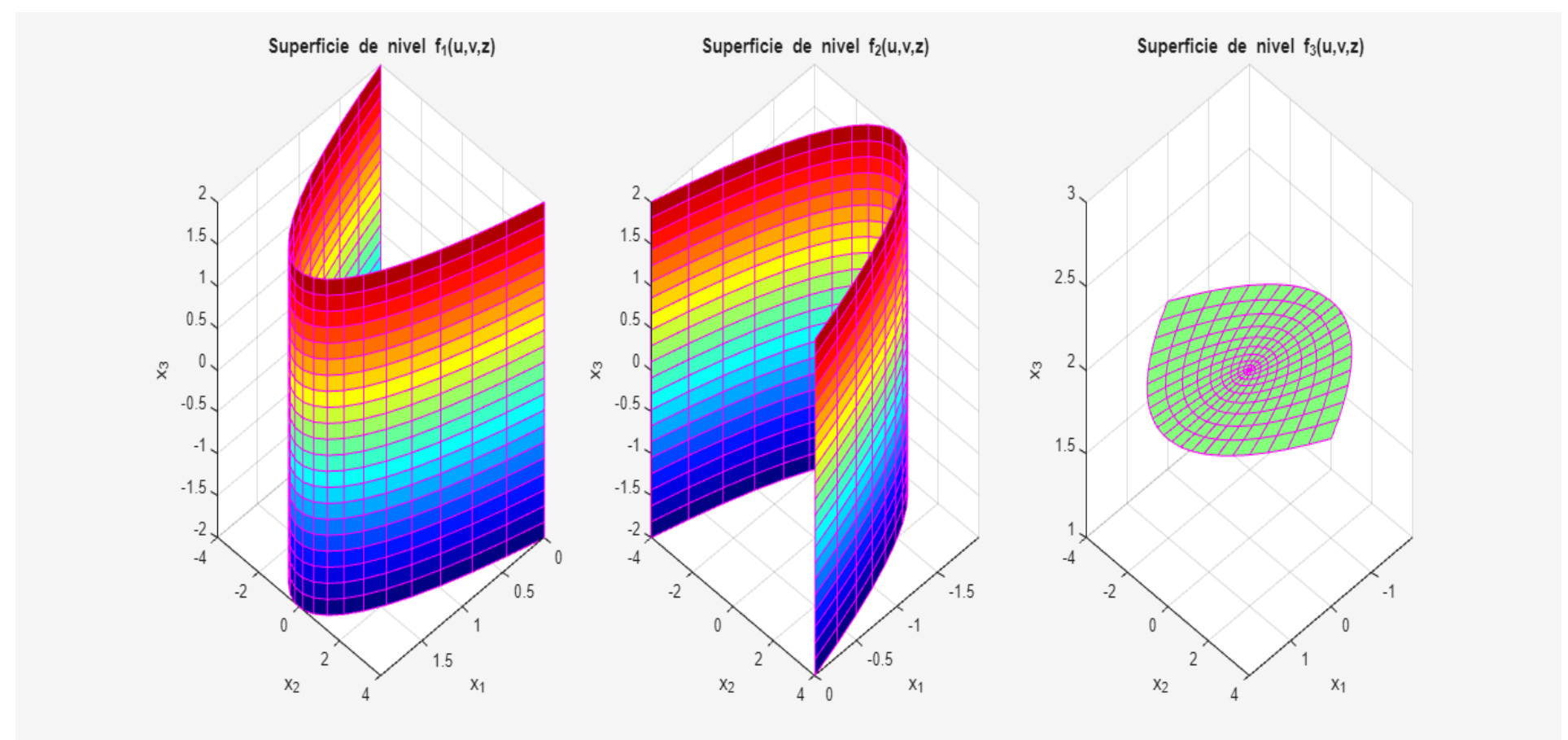
$$u = \sqrt{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} + x_1} = c \Rightarrow x_2^2 + 2c^2x_1 - c^4 = 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & -c^4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta &= \det(A^*) = 0 \\ \delta &= \det(A) = 0 \\ \text{rang}(A^*) &= 3 \\ \text{sign}(A) &= (1, 0) \end{aligned}$$

Las superficies regladas son aquellas generadas por una recta móvil, que parametrizamos:  $\varphi(u, v) = \gamma(v) + u\vec{w}(v)$

$$\varphi(z, v) = \gamma(v) + z(0, 0, 1) = \left( \frac{1}{2}(c^2 - v^2), cv, z \right) \quad \varphi(z, u) = \gamma(u) + z(0, 0, 1) = \left( \frac{1}{2}(u^2 - c^2), uc, z \right) \quad \varphi(u, v) = \left( \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv, c \right)$$

Al haber podido expresarlas mediante la parametrización dada en la definición, son superficies regladas



### CURVATURA DE LA PARÁBOLA

$$y = -Ax^2 + B; \text{ donde } A = 3yB = 1; x \in [-1, 1]$$

$$\kappa(x) = \frac{|\vec{v}(x) \times \vec{a}(x)|}{|\vec{v}(x)|^3}$$

$$\vec{v}(x) = \vec{r}' = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$$

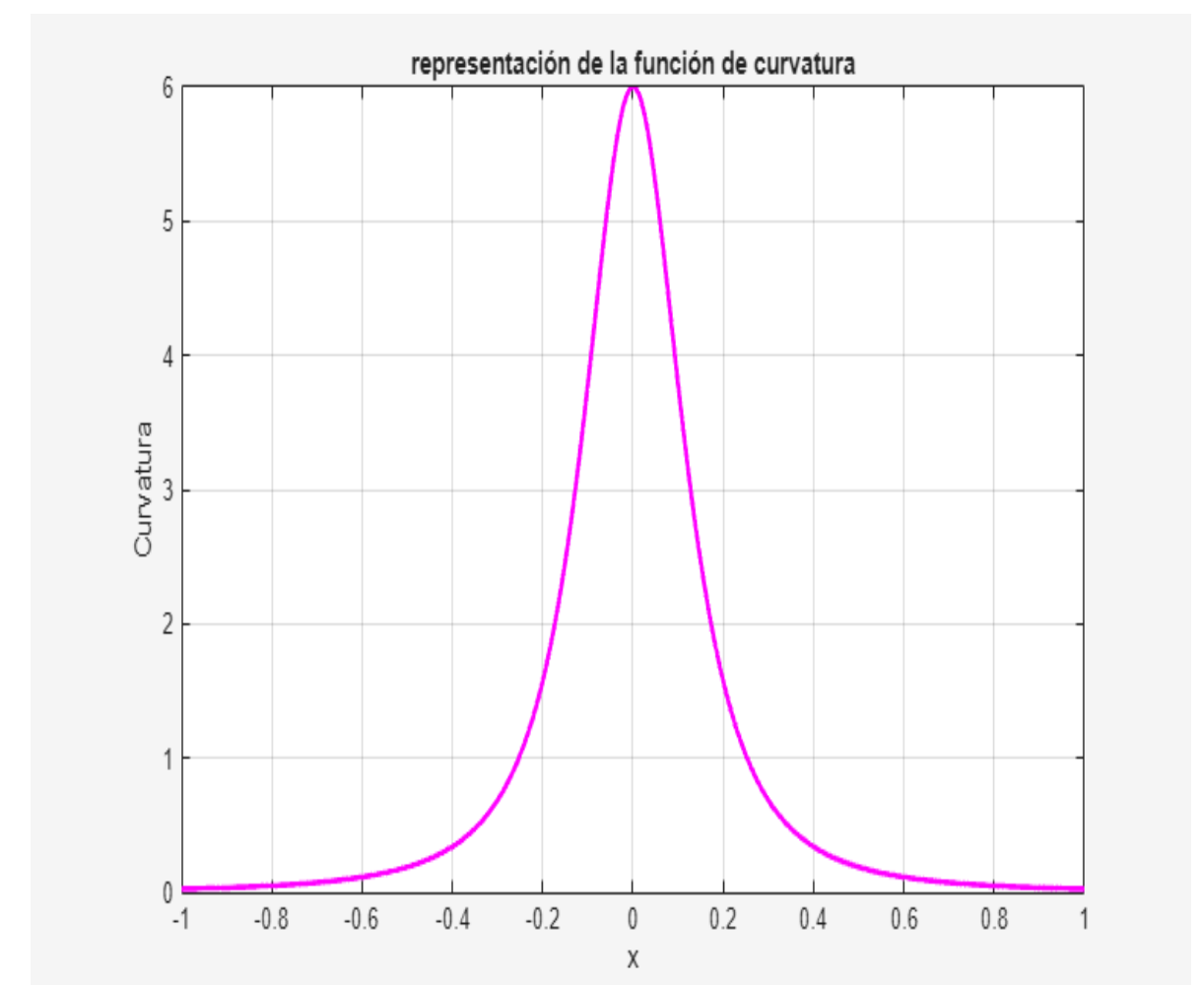
$$\vec{e}_z = \frac{\gamma'_z}{h_z} = \vec{k} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v}(x) \times \vec{a}(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\vec{k}$$

$$\text{Para } x = -1: \kappa(-1) = \frac{6}{(1 + 36)^{3/2}} = 0,027$$

$$\text{Para } x = 1: \kappa(1) = \frac{6}{(1 + 36)^{3/2}} = 0,027$$

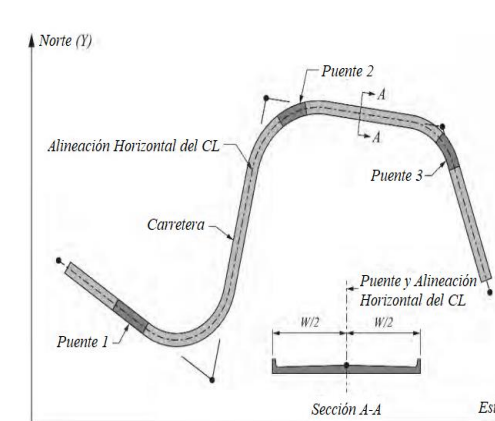
$$\text{Para } x = 0: \kappa(0) = \frac{-6}{(1)^{3/2}} = 6$$



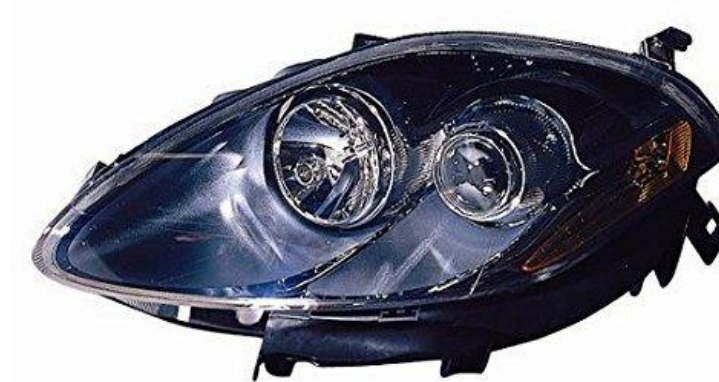
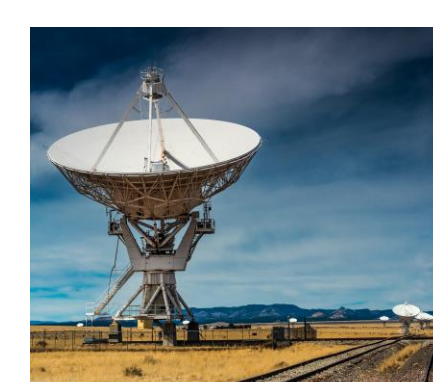
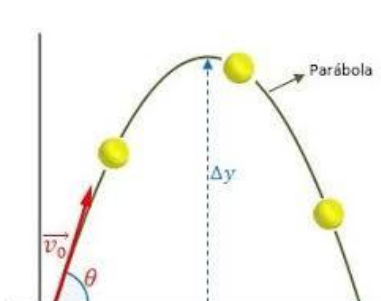
## PARÁBOLA: USO EN LA INGENIERÍA

### INGENIERÍA CIVIL Y ARQUITECTURA

En esta área la parábola se emplea por varios motivos: distribución uniforme de cargas en puentes y presas; alineaciones suaves (con pendiente adecuada) en carreteras para una mayor seguridad vial; determinación del ancho y alto de un túnel para que circulen los vehículos adecuados por él; y en cubiertas son empleadas por su gran belleza estética ( más su eficiencia estructural).



### OTROS USOS



La física de la parábola es empleada en diversos ámbitos, se suele estudiar su composición de MRU y MRUA en deportes, balística... Además, de su propiedad de reflexión: cualquier punto cualquier rayo que entra perpendicular a la directriz (paralelo al eje focal) se refleja y pasa directamente por el foco.