Sobre la aproximación de funciones con series de Fourier

Luis García Suárez, Álvaro Moreno Cisneros y Juan Pérez Guerra

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Qué funciones aproximan bien

Las series de Fourier son una de las mejores herramientas para aproximar funciones, ya que dan unos resultados muy buenos, que no requieren de condiciones muy fuertes. El objetivo de este trabajo es ilustrar que funciones se aproximan mejor por series de Fourier en función de distintos parámetros como el número de coeficientes, la regularidad, la longitud del intervalo...

Introducción

Para nuestras simulaciones hemos implementado en python la base trigonométrica general y la serie de fourier general en un intervalo $[-L/2, L/2]$. La base trigonométrica es

$$\left(1, \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right)$$

Con esto llegamos a la serie de Fourier:

$$f_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + d_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]$$

Cabe aclarar que la base **no** está normalizada. En el programa las integrales para calcular los coeficientes se calculan numéricamente mediante el método del trapecio. Para comparar numéricamente las funciones originales y la aproximación mediante la serie de Fourier, utilizamos la norma $L^2([-L/2, L/2])$ que es $\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$ y la norma $L^\infty([-L/2, L/2])$ que es $\sup_{x\in[-L/2,L/2]} |f(x)|$.

Número de Coeficientes

La primera comparación que vamos a visualizar es la más natural: cómo a medida que aumentamos la cantidad de coeficientes de Fourier mejora la aproximación de la serie de Fourier. Para esto, vamos a utilizar el polinomio $p(x) = x^2$:

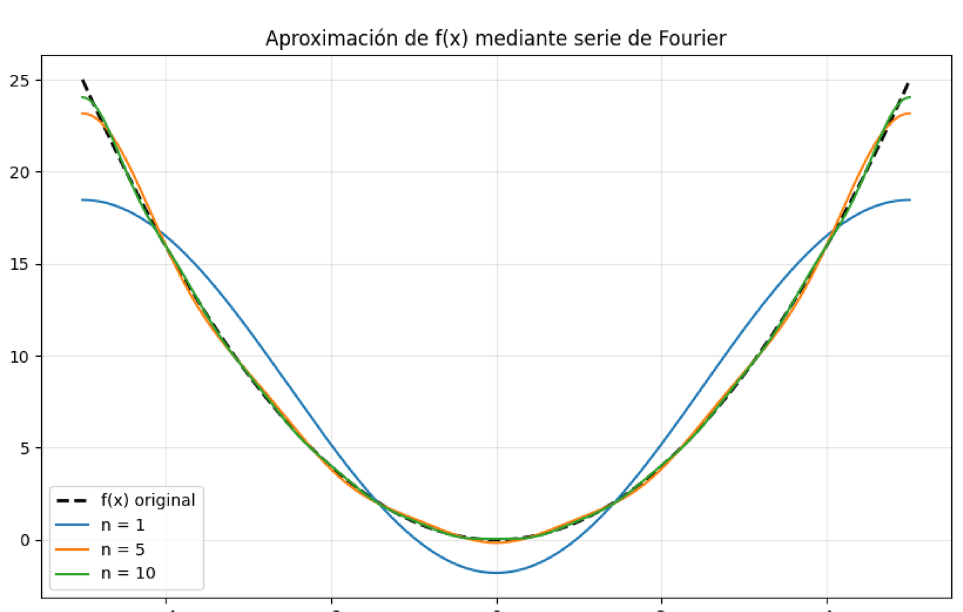

Fig. 1: Serie de Fourier con distintos n

Podemos observar que:

- $\boldsymbol{n = 1}$ **:** La curva azul captura la periodicidad básica pero con un error residual elevado en los extremos.
- $\boldsymbol{n = 5}$ **:** La curva naranja ajusta la curvatura principal, eliminando las desviaciones.
- $\boldsymbol{n = 10}$ **:** La curva verde se solapa casi perfectamente con la función original $f(x)$ (línea discontinua), minimizando el error cuadrático.

Como era de esperar a mayor número de elementos en la serie de Fourier mejor aproximación de la función.

Regularidad de la función

Otra comparación que podemos visualizar es cómo de bien aproxima la serie de Fourier a series que son más o menos regulares. En las imágenes podemos encontrar la aproximación del monstruo de Weierstrass dado por :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

con $a = 1/2$ y $b = 13$ y de la función discontinua pero cuadrado integrable

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

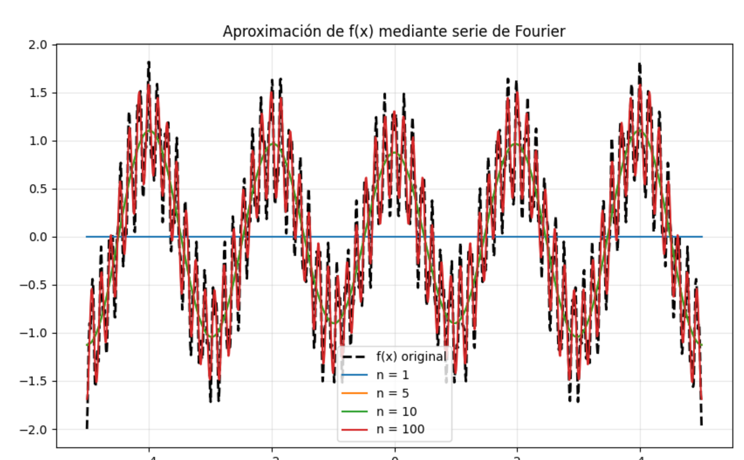

Figure 1: Serie de Fourier del Monstruo de Weierstrass

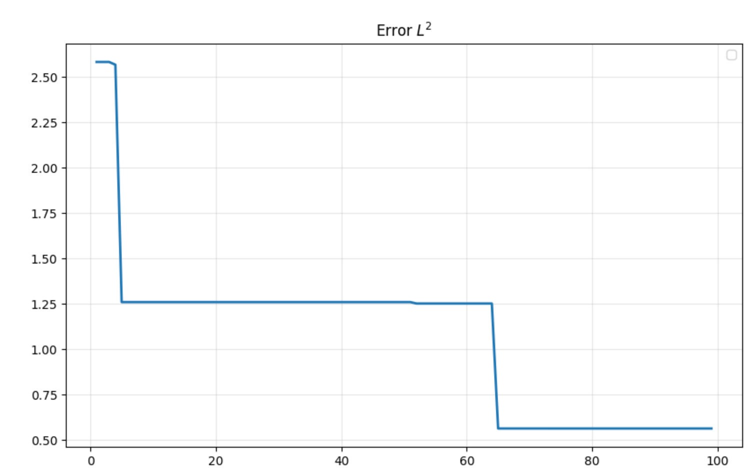

Figure 2: Error en L^2 según n

Como podemos ver, aunque a priori el Monstruo de Weierstrass es algo que no parece regular, cuando consideramos el espacio L^2 la función es bastante regular y la serie de Fourier la aproxima correctamente con un error relativamente pequeño.

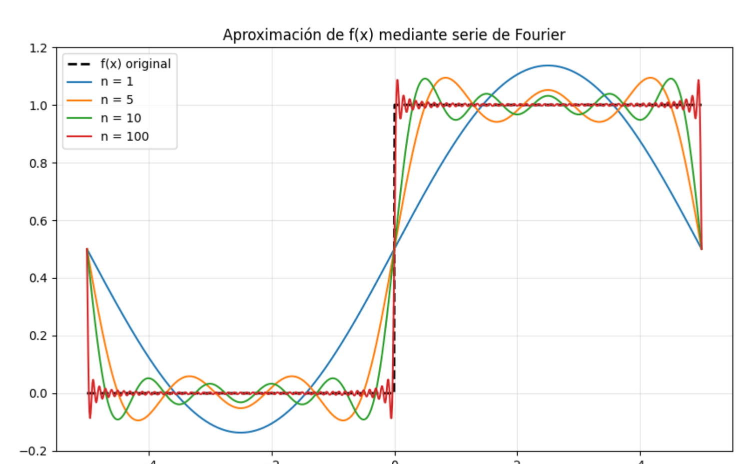

Figure 3: Serie de Fourier de una función discontinua

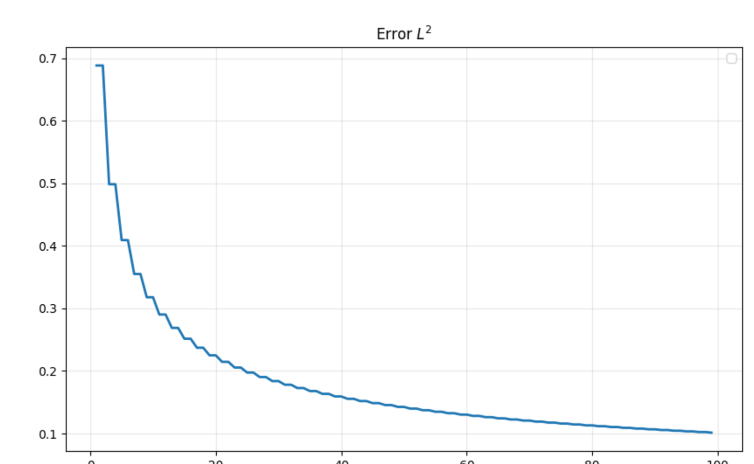

Figure 4: Error en L^2 según n

Vemos que la función discontinua aproxima peor por el salto que presenta en $x = 0$. Aquí podemos apreciar el fenómeno de Gibbs cuando la serie de Fourier intenta aproximar la discontinuidad. Este fenómeno ocurre cuando intentamos aproximar una función con saltos bruscos mediante una suma de senos y cosenos.

- **Oscilaciones persistentes:** En los puntos de discontinuidad, aparecen "picos" o sobreimpulsos que no desaparecen aunque aumentemos el número de términos (n).
- **Error constante:** A medida que $n \to \infty$, el ancho de la oscilación se reduce, pero su altura se mantiene constante en aproximadamente un **10%** del valor del salto.

Sumas de Césaro

En las secciones anteriores, hemos observado que la serie de Fourier tradicional presenta oscilaciones (Fenómeno de Gibbs) al aproximar discontinuidades. Para mitigar esto, podemos utilizar las Sumas de Cesàro, que consisten en tomar el promedio aritmético de las primeras n sumas parciales de la serie de Fourier.

Si $S_k(x)$ es la suma parcial de orden k de la serie de Fourier, la suma de Cesàro de orden n, denotada como $\sigma_n(x)$, se define como:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$$

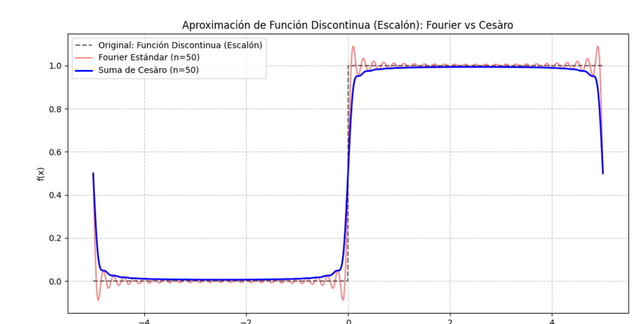

Fig. 2: Función discontinua

Al promediar las oscilaciones, los "picos" o sobreimpulsos que aparecen en las discontinuidades (como en la función escalón analizada) se suavizan drásticamente. Sin embargo, en el caso del monstruo de Weierstrass da lugar a más error:

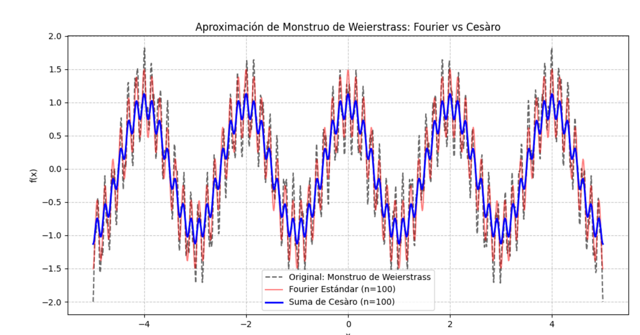

Fig. 3: Monstruo de Weierstrass

Conclusión

La eficacia de las series de Fourier depende de la regularidad de la función. Mientras que en funciones suaves como x^2 la convergencia es casi perfecta con pocos términos, en funciones discontinuas surge el **fenómeno de Gibbs**. Las **sumas de Cesàro** eliminan eficazmente estas oscilaciones al promediar las sumas parciales, aunque resultan menos precisas para funciones de alta irregularidad local como el monstruo de Weierstrass. En definitiva, la serie de Fourier es una herramienta robusta en el espacio L^2 que permite aproximar funciones complejas con condiciones mínimas de regularidad.

Referencias

[1] Matewiki. *Página principal - Escuela de Caminos, UPM.* 2026. URL: `https://matecaminos.upm.es/wiki/P%C3%A1gina_principal`.

[2] Python Software Foundation. *Python Language Reference.* 2026. URL: `https://www.python.org`.

[3] Sandro Salsa and Gianmaria Verzini. *Partial Differential Equations in Action - From Modelling to Theory.* Vol. 147. UNITEXT. Springer Nature Switzerland, 2022.