

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER RESPECTO LA REGULARIDAD DE SUS FUNCIONES

Sergio Maccanin Rodríguez, Ángela Marquet Aldamiz-Echevarría, Luis Zulueta Guisasola

Universidad Politécnica Madrid



Nuestro objetivo

El objetivo de nuestro trabajo es estudiar la convergencia de las series de Fourier mediante la regularidad de las funciones, es decir de como influyen al comportamiento de su convergencia. Más específicamente, queremos ver la relación que hay entre la regularidad de la función, es decir, su continuidad y derivabilidad, y los distintos tipos de convergencia: puntual, uniforme, norma en $L^2([-π, π])$, siendo $[-π, π]$ el dominio de definición de la función. Para ello, llevaremos a cabo el estudio de las condiciones de convergencia, al igual que casos en los que esta falle, viendo funciones tanto suaves como otras con discontinuidades y saltos. Representaremos también dichas funciones para así dar al trabajo un enfoque más visual.

Convergencia en L^2

En la teoría de la convergencia de las series de Fourier, la regularidad de las funciones es sumamente importante, pues como vamos a comprobar esta nos muestra como va a ser la convergencia de su serie. Sea f una función, sabemos que la serie de toda función de cuadrado integrable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty,$$

tiene convergencia en norma L^2 . Lo que implica que la distancia en casi todo punto de f y la sumas parciales de su serie de Fourier es cero, cuando n tiende a infinito.

Esta es una convergencia muy debil, ya que, podríamos tener error infinito cuando hagamos uno a uno la diferencia entre f y su serie de Fourier.

Convergencia puntual

Sea una función f continua en cada intervalo de longitud 2π salvo en un número finito de discontinuidades de salto en dichos puntos, monótona y acotada, entonces el valor de la función coincide con el promedio entre el límite lateral izquierdo y el límite lateral derecho.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Toda función que satisfaga estas condiciones se denomina función continua a trozos y tiene una serie de Fourier que converge puntualmente a $f(x)$, donde esta es continua.

Convergencia uniforme

El método más sencillo para estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones es mediante el Teorema de Weierstrass. Este indica que dadas una serie de funciones, si se puede mayorar estas mediante una constante, distinta para cada función, de forma que la serie de dicha constante sea convergente, entonces la serie de la función converge de manera uniforme.

Además, si f es una función continua y C^1 a trozos en un intervalo, es decir, derivable salvo en un número finito de puntos, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .

Desarrollo

Primero hemos aproximado la función $f(x) = x$ para observar como varia la serie de Fourier de nuestra función f dependiendo de n . Refiriéndonos a la gráfica, podemos observar que las funciones de color más cálido son las que más términos tiene y queremos ver si aproximan mejor la función.

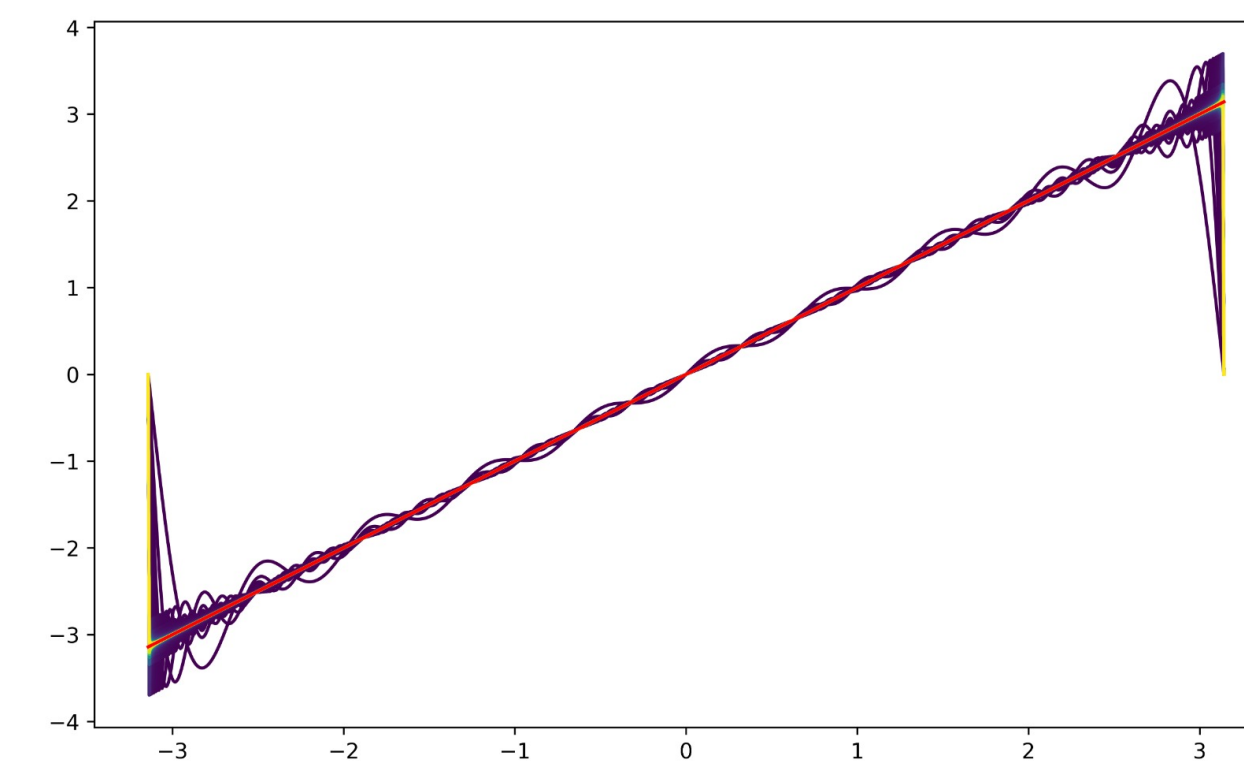


Fig. 1: Sumas parciales de la serie de Fourier de $f(x) = x$

A continuación procedemos a graficar la diferencia entre las sumas parciales de las serie de Fourier y la propia f , obteniendo así la siguiente gráfica del error.

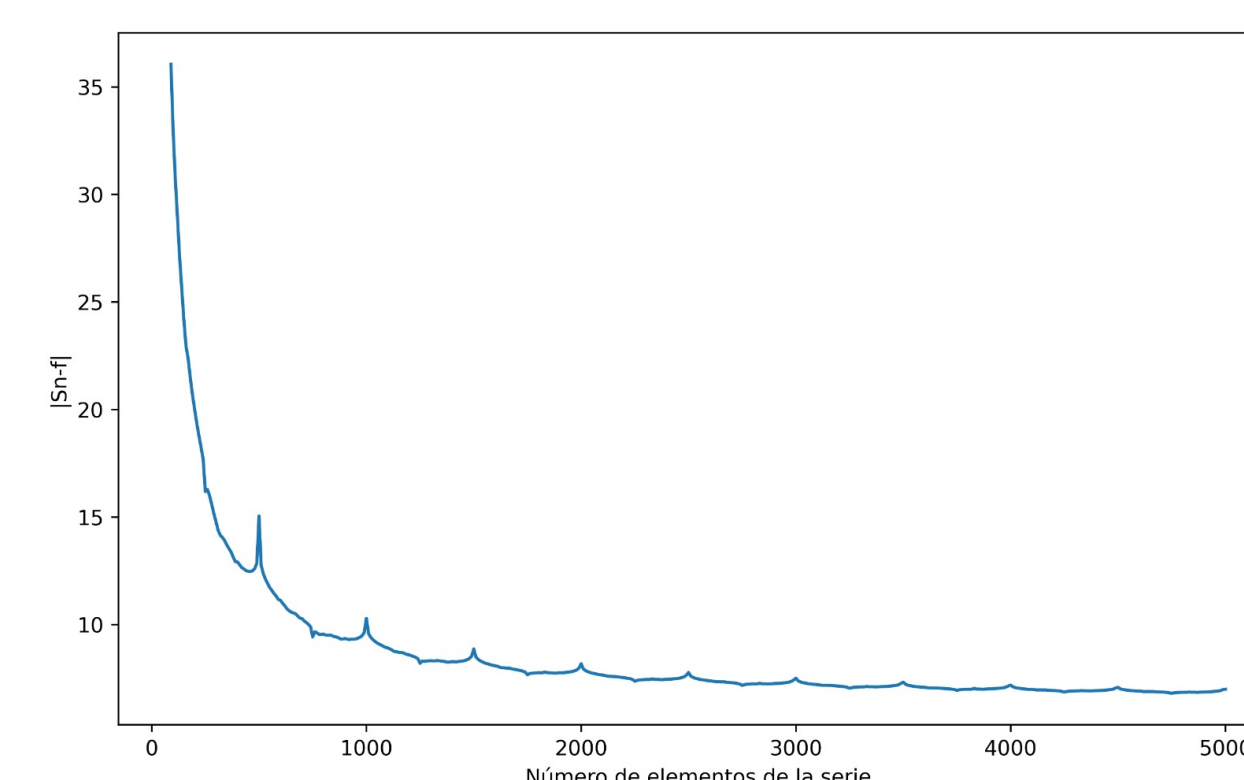


Fig. 2: Gráfica del error

En esta gráfica podemos apreciar que cuanto más grande es la n el error es menor y por tanto la serie de Fourier aproxima mejor a f .

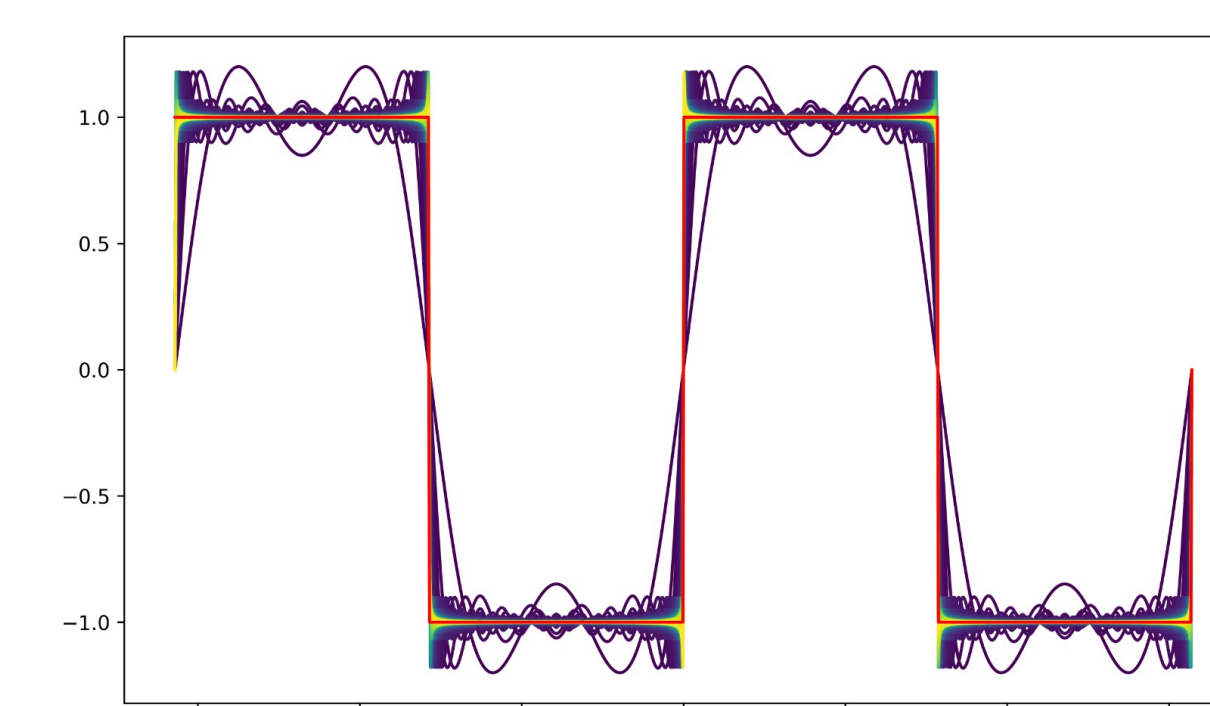
Antes hemos hablado de las distintas formas de convergencia, por lo que procederemos a comparar numéricamente el error que comete una serie que tiene convergencia puntual en casi todo punto y otra función que converge uniformemente. Para el caso de convergencia puntual, utilizaremos la función continua a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [0, \frac{\pi}{2}], \\ -1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

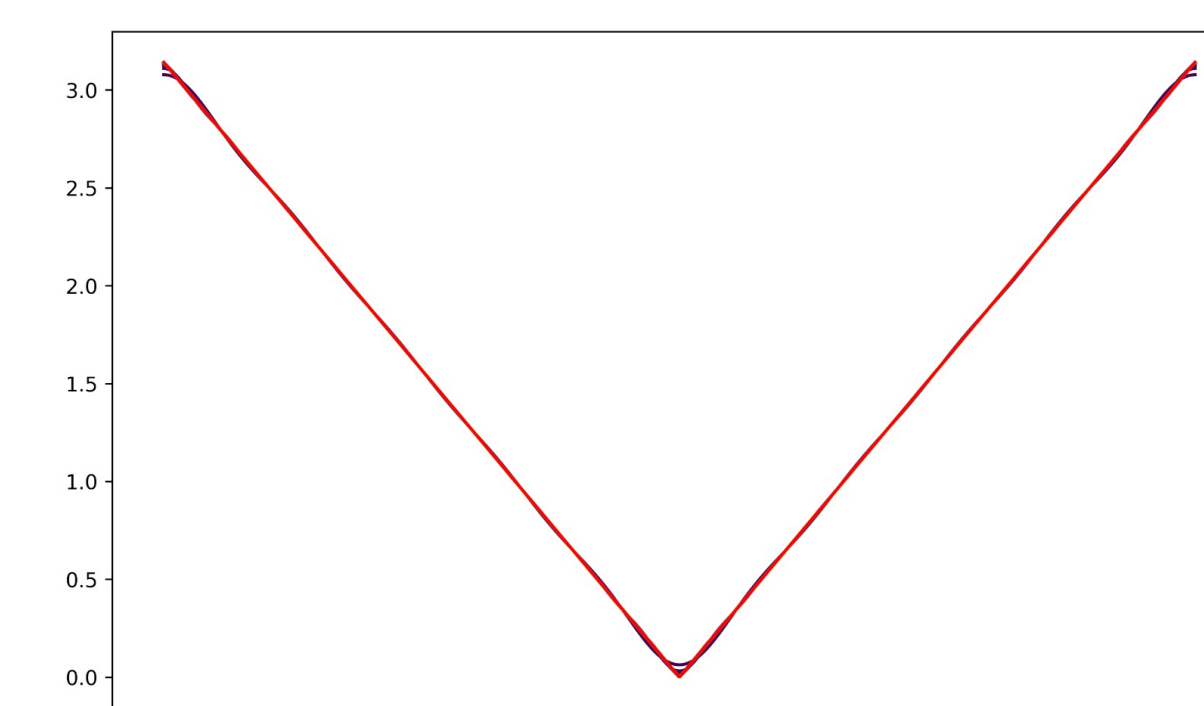
Y para el caso de convergencia uniforme, utilizamos una función continua y C^1 a trozos, siendo esta:

$$h(x) = |x|$$

Como en el primer caso visto, vamos a graficar la función junto con su serie de Fourier, para posteriormente graficar su error.



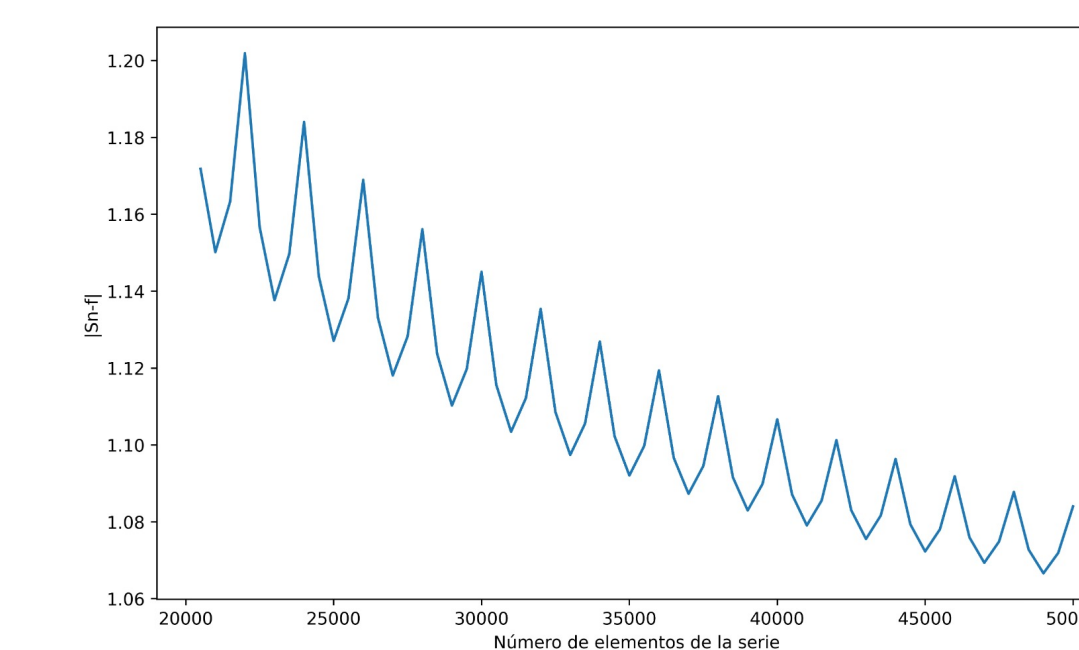
Sumas parciales de la serie de Fourier de $g(x)$



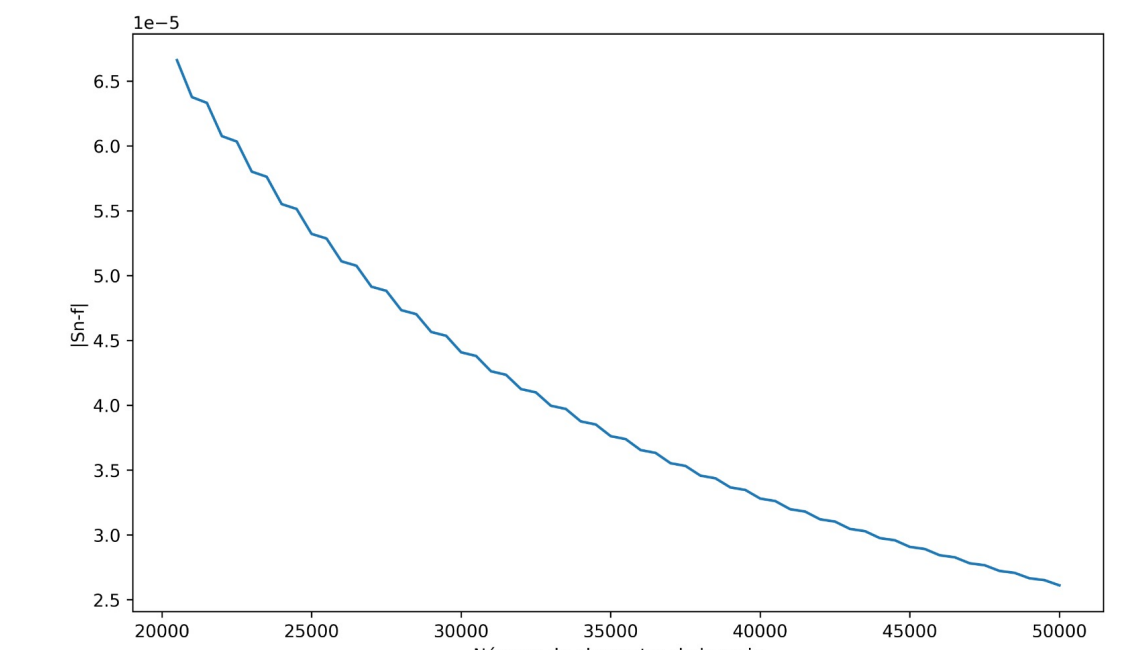
Sumas parciales de la serie de Fourier de $h(x)$

Desarrollo (continuación)

Como podemos observar las sumas parciales de la serie de Fourier de $h(x)$, se asemejan mucho a $h(x)$, tanto es así que en la gráfica percibir la diferencia es realmente complicado. Sin embargo, en el caso de $g(x)$ (función a trozos con convergencia puntual) su aproximación por series de Fourier es bastante peor. Por último, tal y como hemos mencionado antes, vamos a graficar el error que se produce al aproximar cada función respectivamente por su serie de Fourier.



Error cometido por la aproximación de la serie de Fourier de $g(x)$.



Error cometido por la aproximación de la serie de Fourier de $h(x)$

En la primera gráfica podemos como el error es de alrededor de uno, es decir bastante grande y además cuando las iteraciones crecen mucho, parece que este error no tiende a ser menor que uno.

Para la segunda gráfica, cabe destacar que se ha utilizado una escala de 10^{-5} para poder observar bien su comportamiento. En este caso podemos ver como el error cometido con la aproximación por series de Fourier es mucho menor, y que este disminuye considerablemente a medida que suben el número de iteraciones.

Conclusión

Con este trabajo hemos podido observar que existe una relación directa entre la regularidad de una función y la naturaleza de la convergencia de su serie de Fourier, demostrando con ejemplos que mayores niveles de suavidad implican mejores propiedades de convergencia y menor error de aproximación.

Bibliografía

- 1- Convergencia de series de Fourier, Javier Canto Llorente, UPV/EHU, Junio 2016
- 2- 1B Methods lecture notes: Part I: Fourier Series, self adjoint ODEs, Richard Jozsa, DAMTP Cambridge, Octubre 2013



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID