ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

PLACA PLANA (GRUPO 20)

Alejandro Trejo, Marcos Rodríguez, Gloria García, Ángel De Miguel, Manuel Riesgo

INTRODUCCIÓN

Planteamiento del Problema

Una **placa plana** es una superficie en **dos dimensiones** que representa la **sección longitudinal** de una **viga rectangular** en **situación de voladizo apoyada sobre la pared izquierda**. Ocupa la región:

$$(x, y) \in [0, 4] \times [f(x), g(x)]$$

Las **funciones** que definen los bordes son:

$$f(x) = \frac{x}{8}, \quad g(x) = 2 - \frac{x}{8}$$

Esta placa está sometida a una **temperatura** definida por:

$$T(x, y) = (1 + (y - 1)^2)(4 - x)$$

Además, existe un **desplazamiento** debido a una fuerza. Partiendo del **vector posición genérico** $\vec{r}_0(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, la posición final de cualquier punto es:

$$\vec{r}_d(x, y) = \vec{r}_0(x, y) + \vec{u}(x, y)$$

Para los cálculos, supondremos que el desplazamiento sigue el **campo**:

$$\vec{u}(\rho, \theta) = -\frac{1}{20}\rho^2 \cos\theta \vec{e}_\theta$$

LEY DE FOURIER

La Ley de Fourier enuncia que el **calor** fluye desde el punto más **caliente** hacia el más **frío**, siguiendo el **sentido opuesto** del **gradiente térmico** y siendo **proporcional** a este, como hemos representado en la siguiente gráfica.

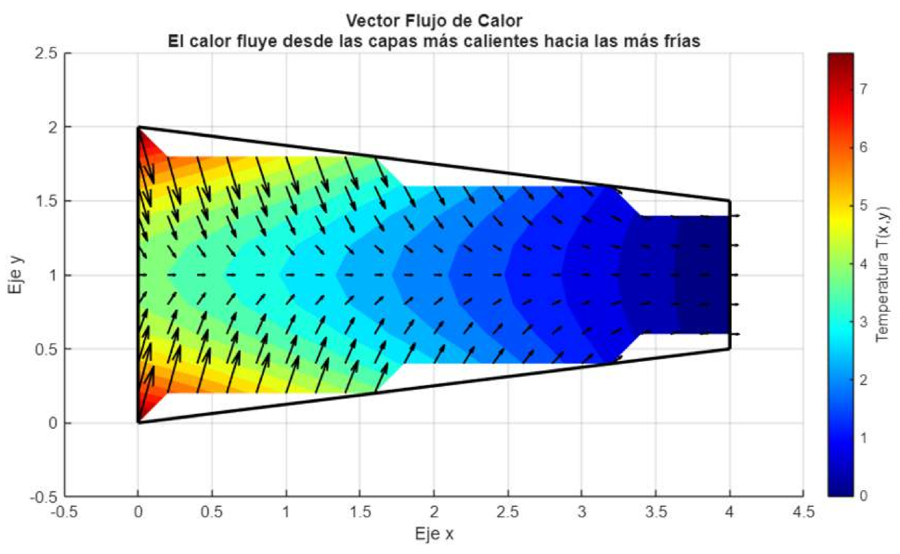

Figure 1. Flujo de calor. El calor fluye de las capas calientes a las frías

DESPLAZAMIENTO DEL SÓLIDO

Análisis del Desplazamiento

Debido a la **fuerza**, cuya magnitud desconocemos, se provoca un **desplazamiento** siguiendo el **campo** $\vec{u}(\rho, \theta) = -\frac{1}{20}\rho^2 \cos\theta \vec{e}_\theta$. Por tanto, el **sólido** se **desplazará** siguiendo el mismo.

Los **puntos** que más se han **desplazado** son los que están más cerca del **punto de aplicación** de la **fuerza**.

A continuación se muestran las gráficas donde se aprecia el **desplazamiento** sufrido:

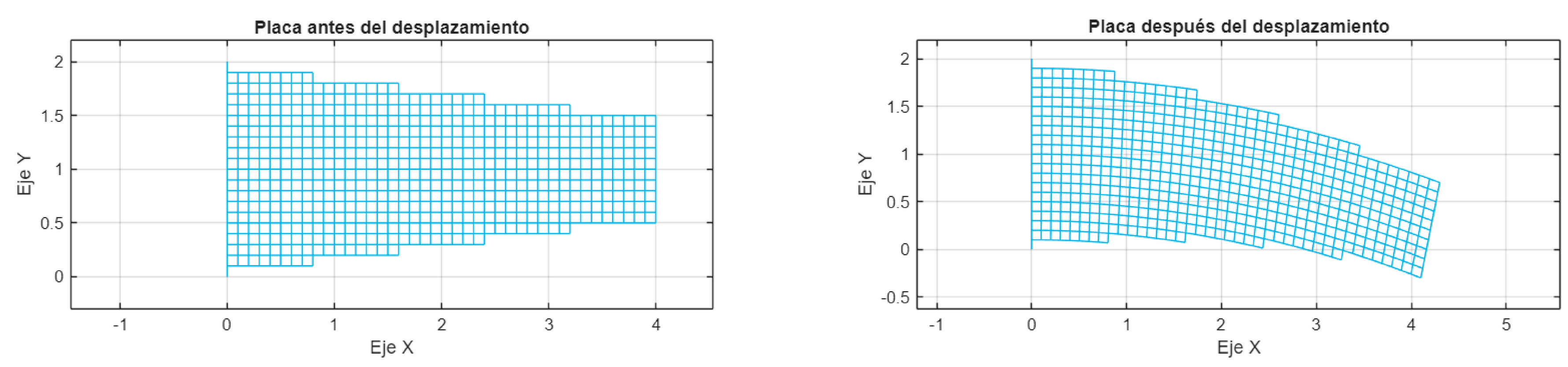

Figure 2. Placa antes (izquierda) y después (derecha) del desplazamiento

TENSOR DE DEFORMACIONES

El tensor deformaciones describe las deformaciones de la placa. Su diagonal mide las deformaciones a tracción o a compresión, mientras que las que están fuera de la diagonal miden las deformaciones de cizalladura.

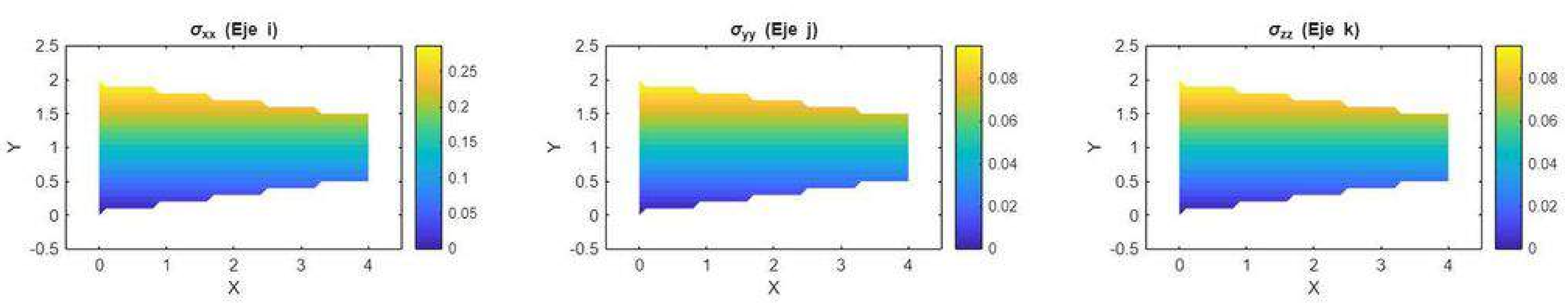

Figure 3. Tensor de deformaciones : Eje i (izquierda), Eje j (centro), Eje k (derecha)

TENSOR DE VON MISES

La tensión de Von Mises es una magnitud escalar que indica el estado tensional de cada punto. Su utilidad principal es predecir si la pieza fallará comparando este valor con el límite elástico del material.

1. **Interpretación física:** Se basa en la Teoría de la Energía de Distorsión. Afirma que los materiales dúctiles fallan cuando la energía de deformación alcanza un valor crítico.
2. **Fórmula de cálculo:** En función de las tensiones principales, se expresa como:
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$
3. **Análisis de resultados:** La tensión máxima se localiza en el extremo superior derecho. Según el criterio de Von Mises, si la placa fallara, la rotura comenzaria en esa esquina debido a la alta concentración de energía.

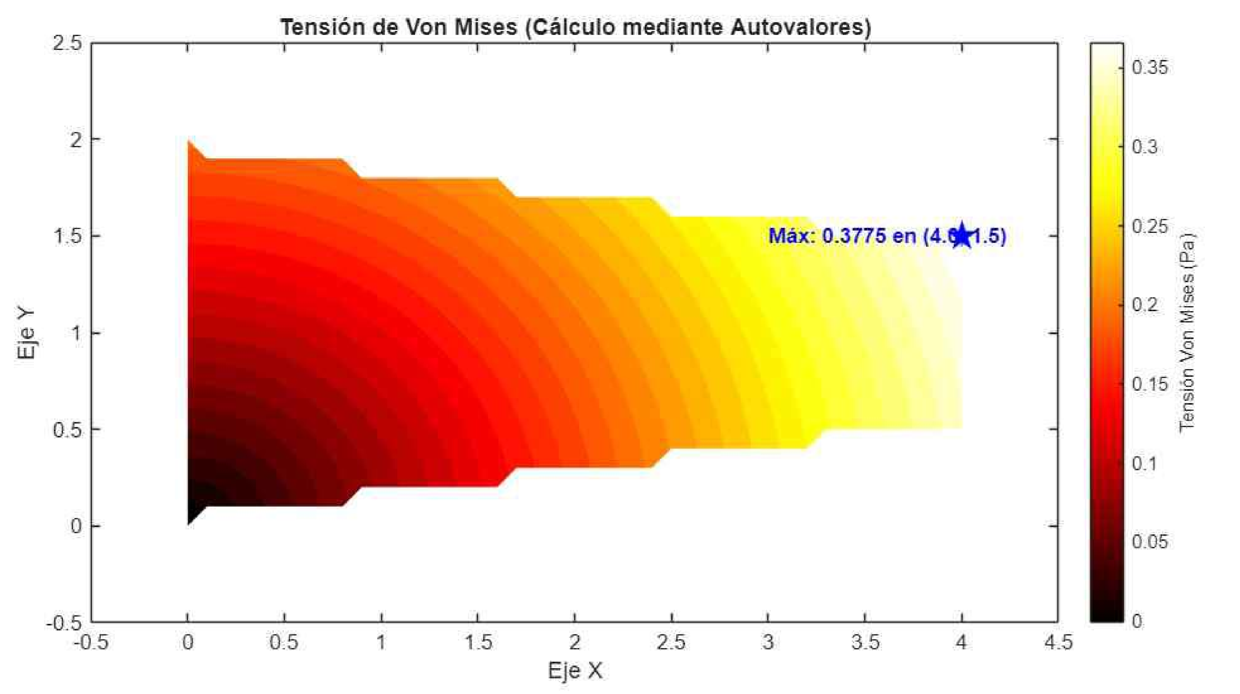

Figure 4. Tensor de Von Mises calculado mediante autovalores

CAMPO DE FUERZAS

Las **fuerzas volumétricas** representan las **acciones distribuidas** en el **volumen** del material. Su cálculo se define mediante la **divergencia del tensor de tensiones**:

$$\vec{F} = -\nabla \cdot \sigma$$

Al obtener valores numéricos del orden de 10^{-16} (un **cero computacional**), se confirma la **ausencia de fuerzas de cuerpo** físicas.

Por tanto, la placa está en **equilibrio estático**, sometida únicamente a las **acciones externas de contorno** y sin presentar desequilibrios internos.

MASA

La **masa total** M de la placa representa la **cantidad de materia** acumulada en el sólido y se obtiene integrando la **función de densidad** $d(x, y) = (4 - x)|y|$ sobre el **dominio de la placa** $\mathcal{R}$.

Físicamente, como la densidad depende de $(4 - x)$, la masa se concentra más cerca del **empotramiento** ($x = 0$) y disminuye hacia el **extremo libre**.

La operación exacta a resolver es la siguiente **integral doble**:

$$M = \iint_{\mathcal{R}} d(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_{x/8}^{2-x/2} (4 - x)y\, dy\, dx$$

El **resultado analítico exacto** de esta integral es:

$$M = \frac{48}{5} = \mathbf{9.6} \text{ unidades de masa}$$

EJEMPLOS

Las **vigas en voladizo** son un tipo de estructura que cuentan con un extremo sujeto, anclado o **empotrado** en una pared y el otro **libre**.

En dicho tipo de estructuras se encuentran:

- **Cubiertas** y techos salientes.
- **Puentes**.
- **Marquesinas**.

Por lo general, se usan en aquellas estructuras que requieren un **espacio libre** sin **soportes intermedios**.

Figure 5. Cubierta de un aparcamiento (izquierda) y Cubierta del Estadio Vicente Calderón (derecha)