COORDENADAS CILÍNDRICAS PARABÓLICAS
(Grupo 10)

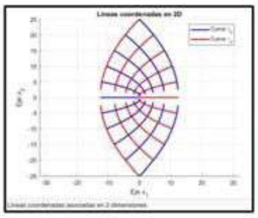
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Andrés Sanzo Fernández, María Hernández Gómez, Rebeca García Paz, Alejandro Polo González, Celia Bolivar Illana

INTRODUCCIÓN

En muchos campos de la ingeniería aparecen geometrías parabólicas. En estos casos las coordenadas cartesianas complican las ecuaciones. Las coordenadas cilíndricas parabólicas simplifican la descripción de estos problemas.

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ x_2 = uv \\ x_3 = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$



PARAMETRIZACIONES

- **Línea coordenada** γ_u: se mantienen v y z fijas y varía u.

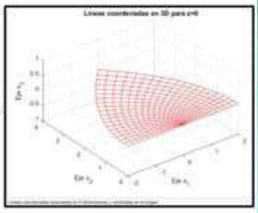
$$\gamma_u(t) = \gamma_u(t, v, z){:}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{t^2 - v^2}{2}, tv, z\right)$$

- **Línea coordenada** γ_v: se mantienen constantes u y z, varía v.

$$\gamma_v(t) = \gamma_v(u, t, z){:}\ (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - t^2}{2}, ut, z\right)$$

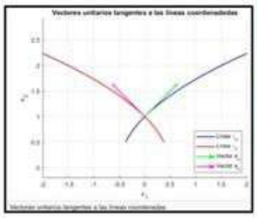
- **Línea coordenada** γ_z: se mantienen constantes u y v, varía z.

$$\gamma_z(t) = \gamma_z(u, v, t){:}\ (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2}, uv, t\right)$$



FACTORES DE ESCALA

Los factores de escala son los **valores que conectan los cambios de coordenadas con las distancias reales en el espacio**. Estos factores se obtienen a partir de los vectores de velocidad y son necesarios para hallar los operadores diferenciales y los vectores tangentes unitarios.



Derivando las coordenadas respecto a (u,v,z) se obtienen los vectores de velocidad a partir de los cuales hallaremos los factores de escala.

$$\gamma_u(t) = \gamma_u(t, v, z){:}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{t^2 - v^2}{2}, tv, z\right) \qquad \begin{gathered}\gamma_u' = u\vec{i} + v\vec{j}.\\ \gamma_u' \rightarrow h_u = |\gamma_u'| = \sqrt{u^2+v^2}\end{gathered}$$

$$\gamma_v(t) = \gamma_v(u, t, z){:}\ (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - t^2}{2}, ut, z\right) \qquad \begin{gathered}\gamma_v' = -v\vec{i} + u\vec{j}.\\ \gamma_v' \rightarrow h_v = |\gamma_v'| = \sqrt{(-v)^2+u^2} = \sqrt{v^2+u^2}\end{gathered}$$

$$\gamma_z(t) = \gamma_z(u, v, t){:}\ (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2}, uv, t\right) \qquad \begin{gathered}\gamma_z' = \vec{k}.\\ \gamma_z' \rightarrow h_z = |\gamma_z'| = 1\end{gathered}$$

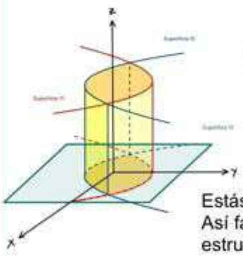
ORTOGONALIDAD

Los productos escalares entre vectores tangentes son nulos, sus vectores son unitarios y el producto vectorial entre dos de sus vectores es positivo y apunta en la dirección del tercer vector. Es por ello que podemos decir que los vectores forman una **base ortonormal orientada positivamente.**

$$\vec{e_u} \cdot \vec{e_v} = 0 \qquad \vec{e_u} \cdot \vec{e_z} = 0 \qquad \vec{e_v} \cdot \vec{e_z} = 0 \qquad |\vec{e_u}| = |\vec{e_v}| = |\vec{e_z}| = 1$$

$$\vec{e_u} \times \vec{e_v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{v^2+u^2}} & \frac{u}{\sqrt{v^2+u^2}} & 0 \end{bmatrix} = \vec{k} = \vec{e_z}$$

SUPERFICIES DE NIVEL



Cada superficie de nivel se obtiene fijando un valor constante del campo:

- Para f_1, se fija **u = 1** → cilindro parabólico.
- Para f_2, se fija **v = 1** → cilindro parabólico.
- Para f_3, se fija **z = 1** → plano horizontal.

Estás superficies **son regladas** y admiten parametrización. Así facilitan los cálculos matemáticos en el diseño de estructuras complejas y curvas.

Algunas de sus utilidades en ingeniería son:

Diseño estructural: creación de rampas, puentes, fachadas y cubiertas.
Fabricación y construcción: ideales para materiales planos, permitiendo construir curvas sin necesidad de doblar excesivamente los materiales.
Optimización de estructuras: reducen costos, disminuyen el desperdicio de material y aligeran perfiles.
Modelado y simulación: su sencilla parametrización facilita el análisis de tensiones y deformaciones, utilizándose para modelar geometrías complejas sin complicaciones matemáticas.
Estética y funcionalidad: crear formas arquitectónicas impresionantes y elegantes sin sacrificar resistencia estructural.

OPERADORES DIFERENCIALES

GRADIENTE: Representa la dirección de máximo crecimiento/decrecimiento de una función.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e_u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e_v} + \frac{1}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

DIVERGENCIA : La divergencia de un campo vectorial es un valor que mide el flujo neto por unidad de volumen de un campo de vectores en cada punto del espacio.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_z F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_z F_v) + \frac{\partial}{\partial z}(h_u h_v F_z)\right]$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{u^2+v^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (3u^2 + v^2 + u^2 + 3v^2) + u^2 + v^2\right] = \frac{3(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 3$$

ROTACIONAL: El rotacional indica la tendencia de un campo vectorial a producir un giro o rotación alrededor de un punto.

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_z}\begin{vmatrix} h_u \vec{e_u} & \frac{\partial}{\partial u}(h_u F_u) \\ h_v \vec{e_v} & \frac{\partial}{\partial v}(h_v F_v) \\ h_z \vec{e_z} & \frac{\partial}{\partial z}(h_z F_z) \end{vmatrix}$$

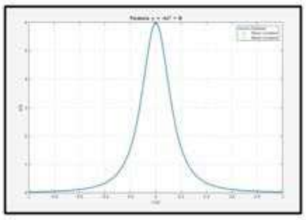
$$\nabla \times \vec{r} = 0$$

El campo vectorial es irrotacional, lo que significa que puede expresarse como el gradiente de un potencial, es conservativo y no presenta rotación.

CURVATURA

$$k(t) = \frac{6}{(1+36t^2)^{3/2}}$$

La mayor curvatura se encuentra en el vértice de la parábola (t=0) y la menor para t=-1 y t=1.



APLICACIONES

Propiedades y aplicaciones desde tres puntos de vista:

Estructural: La curva parabólica permite construir estructuras eficientes donde las cargas se distribuyen a zonas de interés.


Puente de Brooklyn


Embalse del Atazar

Geométrico: Se puede potenciar la propiedad de reflexión con la concentración energía en un foco aportando soluciones innovadoras.


Antena parabólica


Faro de coche

Construcción y arquitectura: Permite dar soluciones arquitectónicas funcionales y estéticas.


Estadio olímpico Atenas


Acuerducto Romano Segovia