Análisis de la convergencia de series de Fourier a funciones

Coloma de Lara, Elena Rodríguez y Carlos de Miguel

Objetivo

En este trabajo vamos a hallar las funciones que mejor se pueden aproximar por su serie de Fourier. Analizaremos funciones con distintos niveles de regularidad y distintos intervalos de definición para llegar a una conclusión.

Base Trigonométrica

Para aproximar cualquier función definida en [-T,T] vamos a utilizar la siguiente base (ya normalizada):

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{2T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}\cos(\frac{n\pi x}{T}), \frac{1}{\sqrt{T}}\sin(\frac{n\pi x}{T})\}_{n\in\mathbb{N}}$$

A esta base se le llama base trigonométrica y sirve para aproximar cualquier función periódica con regularidad suficiente.

Serie de Fourier

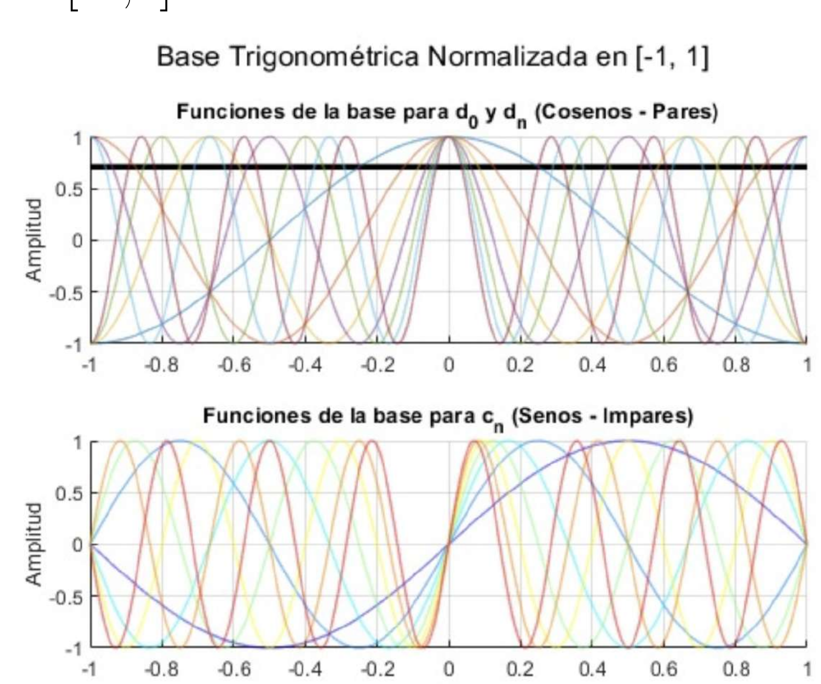
Dada una función $f(x)$ integrable en un intervalo[-T,T], su desarrollo en serie de Fourier se define como:

$$f(x) \sim \frac{d_0}{\sqrt{2T}} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Los coeficientes de Fourier (d_0, d_n, c_n) se calculan mediante las siguientes proyecciones:

- $d_0 = \int_{-T}^{T} f(x)\frac{1}{\sqrt{2T}}dx$
- $d_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{T})dx$
- $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{T})dx$

La siguiente gráfica muestra sirve para visualizar los 7 primeros términos de la base trigonométrica en el intervalo [-1,1]:



Convergencia según el número de términos

Vamos a definir la función $t(x) = 1 - 2|\frac{1}{2} - x|$ en el intervalo $[0,1]$, que es continua. Para trabajar en el intervalo $[-1,1]$, vamos a extender la función de forma impar y la llamaremos f(x):

$$f(x) = \begin{cases} t(x), & x \in [0,1], \\ -t(-x), & x \in [-1,0). \end{cases}$$

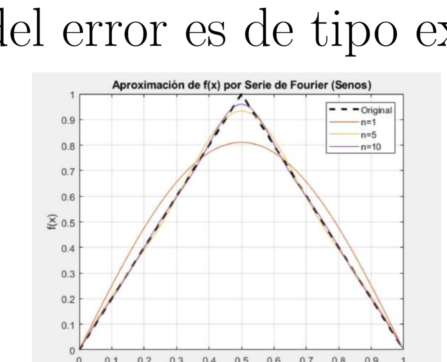
Al haber extendido la función de forma impar, todos los coeficientes de Fourier asociados a funciones pares son nulos. Es decir, la serie de Fourier de $f(x)$ se reduce a:

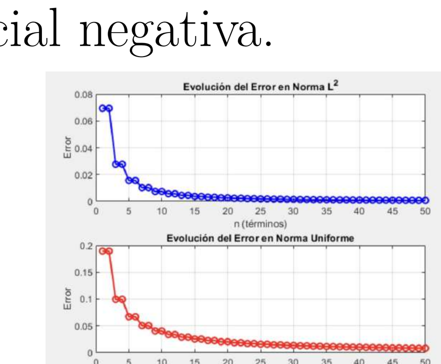
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k\pi x)$$

$$a_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx.$$

Para calcular los coeficientes a_k hemos usado la fórmula del trapecio con una división de 10^{-3}. Para ver como de buena es la aproximación dependiendo del número de coeficientes, hemos calculado el error entre la aproximación de Fourier y la función en las normas L^2 y L^∞.

En la siguiente gráfica podemos observar como al crecer n, la suma parcial $f_n(x)$ se ajusta con mayor precisión a la forma de la función original. La gráfica del error es de tipo exponencial negativa.



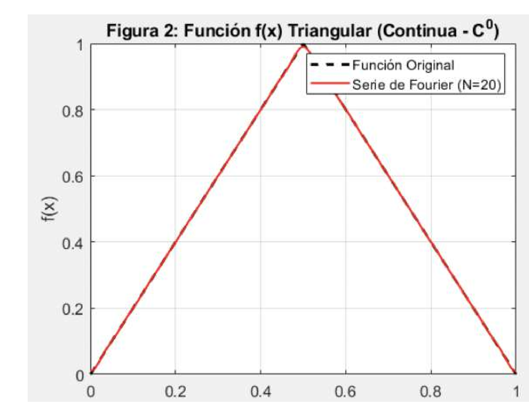


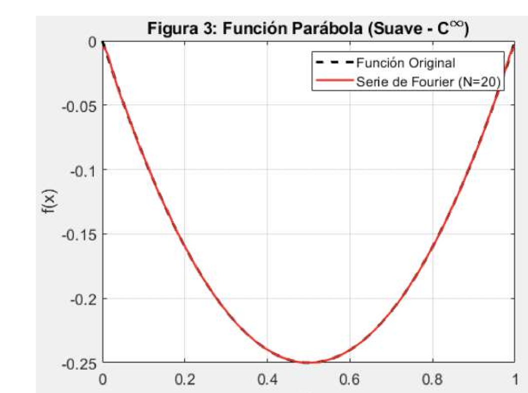
Convergencia según la regularidad

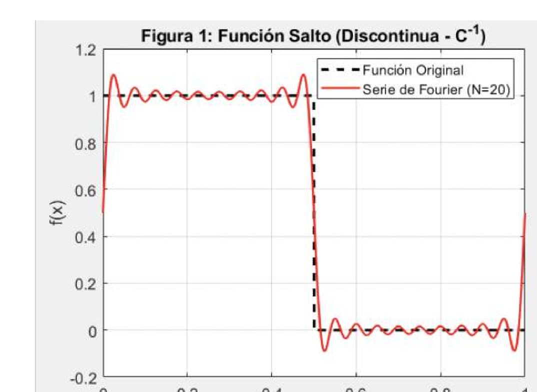
Vamos a ver como la regularidad de una función afecta a la velocidad de convergencia de su serie de Fourier. Según la teoría, si una función tiene k derivadas continuas, sus coeficientes de Fourier a_n, b_n decaen más rápido. Para ello, vamos a comparar la función $f(x)$ del apartado anterior en $[0,1]$, que es una función continua con derivada continua salvo en el pico $x = \frac{1}{2}$, con otras dos:

- $h(x) = x^2 - x$, función de clase C^∞.
- $g(x)$ la función salto definida como

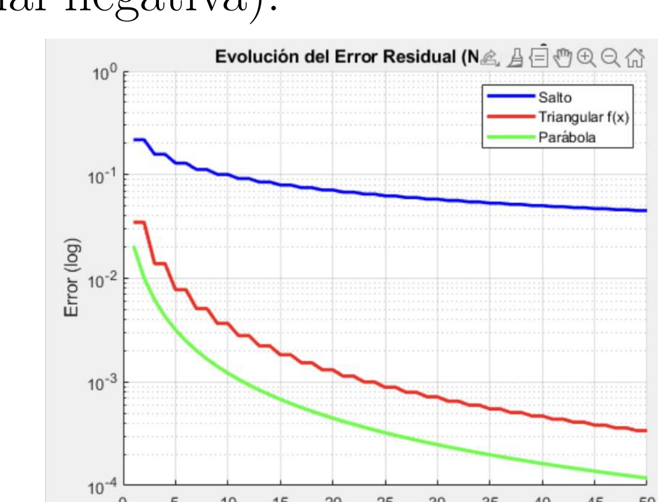
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5) \\ 0, & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$







Podemos ver que en el caso de la parábola la serie de Fourier la aproxima practicamente a la perfección, mientras que en $f(x)$ en el pico $x = 0.5$ falla. En la función salto hay oscilaciones persistentes entorno a la discontinuidad, el llamado fenómeno de Gibbs. Para poder compararlo bien vamos a representar el error de cada función en la norma L^2 en escala logarítmica (ya que hemos visto antes que siguen una exponencial negativa).



En el caso de la función salto añadir términos no hace que disminuya el error de forma significativa, ya que su error es el que menos pendiente tiene. En $f(x)$ el error decrece mucho más rápido, y en la parábola se consigue el menor error con la menor cantidad de términos, presentando la pendiente más inclinada lo que indica que el error disminuye más rápido.

Los coeficientes de Fourier son un indicador de la regularidad. Cuanto más rápido caen a cero, más regular es la función.

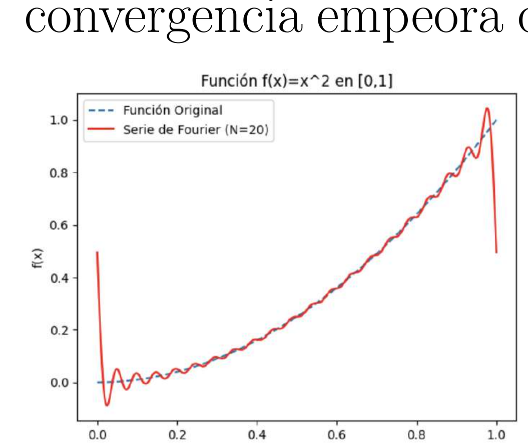
Coeficientes de Fourier bn

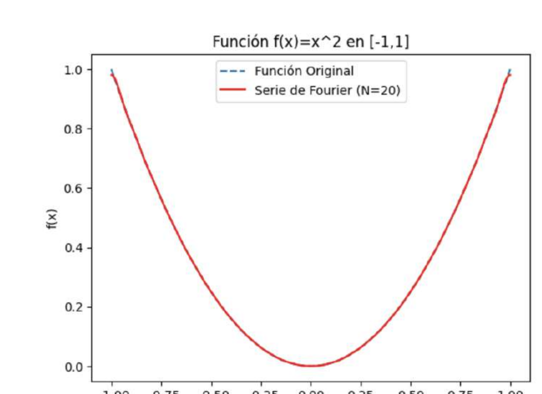
n	Función Salto	Función Triangular	Parábola x^2-x
1	1.2732	0.8106	-0.2580
3	0.4244	-0.0901	-0.0096
5	0.2546	0.0324	-0.0021
7	0.1819	-0.0165	-0.0008
9	0.1415	0.0100	-0.0004
11	0.1157	-0.0067	-0.0002
13	0.0979	0.0048	-0.0001
15	0.0849	-0.0036	-0.0001
Decaimiento	**1/n**	**1/n²**	**1/n³**

Podemos observar que los coeficientes de la función salto decaen de manera $\frac{1}{n}$, más lentos que los de $f(x)$ que lo hacen a un ritmo $\frac{1}{n^2}$ y los de la parábola a $\frac{1}{n^3}$.

Convergencia según el intervalo

La convergencia de las funciones también depende del intervalo escogido porque la serie representa la extensión periódica de la función en el intervalo. Si al repetir periódicamente la función el valor en los extremos coincide, entonces la convergencia es buena debido a que la extensión es regular y los coeficientes decaen rápido. En cambio, si la extensión de la función tiene discontinuidades que antes no había, la convergencia empeora debido al fenómeno de Gibbs.





Conclusión

Después de analizar todo lo anterior, podemos concluir que la mejor aproximación de una función llega cuando ésta es lo más regular posible y utilizamos un gran número de términos en su serie de Fourier.

Referencias

[1] *Matewiki- Ecuaciones Diferenciales Parciales - Curso 24/25-* Códigos de Matlab.