

Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 2013/2014

Ejercicios resueltos

1.- En el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$, con el producto escalar usual, se considera el plano S de ecuación $2x - y + 5z = 0$. Calcule la proyección ortogonal del vector $v = (2, -3, 1)$ sobre él.

Resolución

Primer enfoque: Empezamos escogiendo bases en S y en su ortogonal, para obtener una base de $\mathbf{R}^3$. Por ejemplo $\{(1, 2, 0), (0, 5, 1), (2, -1, 5)\}$.

Pero si tenemos cuidado y elegimos bases ortogonales en los dos subespacios, ahorraremos trabajo después. Por eso tomamos la base $B = \{u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (-2, 1, 1), u_3 = (2, -1, 5)\}$.

Descomponemos el vector v con arreglo a esa base: $v = x^1.u_1 + x^2.u_2 + x^3.u_3$. La proyección de v sobre S la tenemos si nos quedamos con los sumandos que corresponden a ese subespacio: $u = p(v) = x^1.u_1 + x^2.u_2$

La ventaja de haber elegido una base ortogonal se aprecia ahora: las coordenadas se calculan inmediatamente mediante el producto escalar: $x^1 = \frac{v.u_1}{u_1.u_1} = \frac{-4}{5}$, $x^2 = \frac{v.u_2}{u_2.u_2} = \frac{6}{6} = 1$.

En suma, la proyección de v sobre S es $u = \frac{-4}{5} \cdot (1, 2, 0) + 1 \cdot (-2, 1, 1) = (\frac{6}{5}, \frac{-13}{5}, -1)$

Segundo enfoque:

Una vez que tenemos una base de S , preferiblemente ortogonal, escribimos el vector $u = p(v)$ como combinación lineal de los vectores de esa base, puesto que deberá estar en el subespacio S . En nuestro caso, $u = x^1.u_1 + x^2.u_2$, para algunos coeficientes que habrá que determinar. Empleando notación matricial, podemos escribir $u = A.X$ donde los vectores se escriben en columna, y la matriz A contiene los vectores de la base de S , $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nos desentendemos del subespacio ortogonal a S , que no necesitaremos.

Si u es la proyección de v sobre S , entonces el vector $u - v$ será ortogonal a S , es decir, a los vectores u_1 y u_2 , lo que se expresa como $(1, 2, 0) \cdot [A.X - v] = 0$, $(-2, 1, 1) \cdot [A.X - v] = 0$, que se puede escribir de una sola vez poniendo el primer vector encima del segundo (lo que produce la matriz traspuesta de A), y así queda $A^T \cdot [A.X - v] = 0$

De ahí resulta $A^T \cdot A.X = A^T \cdot v$, o sea $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

El sistema se resuelve cómodamente (sobre todo, porque elegimos una base de S ortogonal; si no, habría salido una matriz del sistema no diagonal), y resulta el vector $u = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -13/5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.- En el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}_3[X]$, con el producto escalar dado por la integral entre -1 y 1 , $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p \cdot q$, consideramos los subespacios $L\{1, x\}$, $L\{1, x^2\}$ y $L\{1, x, x^3\}$. Calcule la proyección ortogonal del polinomio $f = 2 - 6x + 3x^2 - 5x^3$ sobre cada uno de ellos.

Resolución

Una diferencia importante con el ejercicio anterior es que la base canónica del espacio $\mathbf{R}_3[X]$ no es ortogonal. Podemos encontrar una base ortogonal por el método de Gram-Schmidt o por operaciones elementales: así obtenemos la base ortogonal $B = \{1, x, 3x^2 - 1, 5x^3 - 3x\}$.

El subespacio $S = L\{1, x\}$ tiene por ortogonal el generado por $\{3x^2 - 1, 5x^3 - 3x\}$. La proyección ortogonal de f sobre S es el polinomio $a \cdot 1 + b \cdot x$ siendo $a = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{6}{2} = 3$, $x^2 = \frac{\langle f, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{-6}{2/3} = -9$. Así pues, la respuesta es $3 - 9x$.

Para el segundo enfoque, nos permitimos abusar de la notación (¡cuidado!), y sustituimos un polinomio por el vector de sus coordenadas en la base canónica (en fila o en columna). Así, el subespacio S será el engendrado por los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$. Desentendiéndonos del subespacio ortogonal, escribimos la proyección buscada como $A \cdot X$ e imponemos que $A \cdot X - f$ sea ortogonal a los vectores de la base de S ; aquí hay que fijarse un poco, porque eso no se traduce por $A^T \cdot [A \cdot X - f] = 0$, sino por $A^T \cdot G \cdot [A \cdot X - f] = 0$, siendo G la matriz de Gram en la base que estamos utilizando, la canónica, que no es ortonormal. Así pues, la ecuación a resolver es $A^T \cdot G \cdot A \cdot X = A^T \cdot G \cdot f$. Echando cuentas, sale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, cuya solución es $x^1 = 3$, $x^2 = -9$, y la proyección es $3 - 9x$.

La proyección sobre los otros dos subespacios se hace de manera similar. El caso de $L\{1, x^2\}$ es muy sencillo, y la proyección es directamente $2 + 3x^2$. La razón es que el ortogonal de ese subespacio es precisamente $L\{x, x^3\}$, lo que nos deja la descomposición de f en la mano.

3.- Calcule la proyección ortogonal del vector $v = (3, 4, -1, 7, 2)$ sobre el subespacio de $\mathbf{R}^5$ (con el producto escalar usual) generado por los vectores $(1, 0, 1, 0, 0)$ y $(0, 2, 0, 1, 0)$.

Resolución

Empleando el enfoque matricial, resulta $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, y $A^T \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}$, de donde $x^1 = 1$, $x^2 = 3$, y la proyección es $(1, 6, 1, 3, 0)$.

Para el otro planteamiento, nótese que los vectores que nos dan ya forman una base ortogonal del subespacio, y que las coordenadas de la proyección se calculan así: $x^1 = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = \frac{2}{2} = 1$, $x^2 = \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} = \frac{15}{5} = 3$.

Observación.- En realidad, no necesitamos los vectores del espacio ortogonal, con conocer una base ortogonal de S tenemos suficiente. Pero a veces es mejor (más rápido y sencillo) proyectar sobre el ortogonal y luego hacer la diferencia; es una cuestión de dimensiones: cuesta menos proyectar sobre el subespacio cuya dimensión sea menor.

4.- En el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$, con el producto escalar usual, se consideran las transformaciones siguientes:

f = simetría respecto del plano $x + y - z = 0$

g = simetría respecto del plano $x + y = 0$

h = simetría respecto del plano $x - z = 0$

Describa las composiciones fg , gf , gh , fgh . Indique qué tipos de transformaciones son, y en su caso indique ejes de giro, amplitudes y otros elementos que sean significativos.

Resolución: Para conocer f , busquemos su matriz en una base: la canónica. Empezamos trabajando con f .

El vector $u_1 = (1, 1, -1)$ es perpendicular al plano $x + y - z = 0$, por lo que $f(u_1) = -u_1$. Los vectores $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ están en ese plano, por lo que $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = u_3$. Así, la base $B_f = \{u_1, u_2, u_3\}$ está bien adaptada para describir f : la matriz de f en esa base es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si P es la matriz de paso de la base B_f a la canónica, es decir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces la matriz de f en la base canónica es $F = P \cdot A \cdot P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Del mismo modo, para describir g elegimos una base B_g formada por el vector $v_1 = (1, 1, 0)$ (perpendicular al plano) y los vectores $v_2 = (1, -1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$ contenidos en él. La matriz de g en esa base es también $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El cambio de base de B_g a la canónica viene dado por $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz de g en la base canónica es $G = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando las dos matrices, obtenemos la matriz de la composición (respecto de la base canónica). Así pues, el producto $F \cdot G = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ representa a la composición fg , mientras que el producto $G \cdot F = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ representa a la composición gf . Se advierte que son distintos, puesto que se trata de dos giros con el mismo eje y de la misma amplitud, pero de sentidos contrarios.

La matriz $F \cdot G$ tiene el autovalor 1 y $v = (1, -1, 0)$ como autovector asociado: la composición fg es un giro con ese vector como eje (nótese que la intersección de los dos planos es la recta $x + y = z = 0$). Para conocer la amplitud, escogemos un vector en el plano perpendicular a ese vector: $x - y = 0$; podríamos elegir el vector $(0, 0, 1)$ o el $(1, 1, 0)$, y calculamos su imagen: el ángulo que formen nos da la amplitud del giro. Así, como $fg(1, 1, 0) = (1/3, 1/3, 4/3)$, el coseno del ángulo de giro es $1/3$ (el producto escalar dividido por el producto de los módulos).

Análogamente, para estudiar h elegimos la base B_h formada por los vectores $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ y $(1, 0, -1)$, y obtenemos que la matriz de h en la base canónica es $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El producto $F \cdot G \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ representa a la composición fgh . Como el determinante de esa matriz es -1 , se trata de una transformación inversa. Tiene un solo autovalor real, que es el -1 asociado al autovector $(-1, 1, 3)$, lo que significa que estamos ante un giro alrededor de ese vector seguido de una simetría respecto del plano $-x + y + 3z = 0$. La amplitud del giro la obtenemos tomando un vector de ese plano, como $(1, 1, 0)$, calculando su imagen: $(-1/3, -4/3, 1/3)$ y el ángulo que forman: $\arccos(\frac{-5}{6})$.

Igualmente, el producto $F \cdot H \cdot G \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ representa a la composición $fhgh$. El determinante es 1, como corresponde a una transformación directa. Sus autovalores son 1 (simple, asociado al autovector $(2, -1, 1)$), lo que indica que estamos ante un giro alrededor de ese vector) y -1 (doble, cuyo autoespacio asociado es el plano $2x - y + z = 0$): se trata de un giro de 180° .

Nota.- Los cálculos los he realizado con Octave UPM.