Capítulo 9. Cónicas y cuádricas

Introducción: un poco de Historia

Imaginemos un cono recto al que cortamos con un plano: la curva que resulta se conoce como *sección cónica* o sencillamente *cónica*. Tales curvas han sido estudiadas desde la antigüedad: la referencia clásica es Apolonio de Perga, en siglo III antes de Cristo.

Por "cono" no ha de entenderse una figura limitada, como el gorro de un payaso, sino una superficie infinita: la que se genera cuando una recta gira alrededor de otra a la cual corta: Así, un cono constará de un vértice y dos "faldones" que se extienden sin límite. Según la inclinación del plano secante, se distinguen tres tipos de cónicas: elipses (cuando el plano corta a todas las generatrices del cono), parábolas (cuando el plano es paralelo a una generatriz) e hipérbolas (cuando el plano es paralelo a dos generatrices). Las elipses son curvas cerradas, en tanto que las otras cónicas son abiertas e ilimitadas; las hipérbolas tienen dos "ramas", porque el plano corta a los dos faldones del cono, y dos *asíntotas*, o rectas a las que se van aproximando sus puntos; las parábolas tienen una sola rama, por cuanto el plano sólo corta a un faldón del cono; la circunferencia es un caso particular de elipse.

Las cónicas también pueden definirse de otras maneras. Así, la elipse está formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados, llamados *focos*, es una cantidad prefijada; la hipérbola, por los puntos tales que la diferencia de esas distancias es constante; la parábola, por los puntos que equidistan de un punto dado (el *foco*) y una recta dada (la *directriz*). Esta forma de ver las cónicas (y otras más) era conocida por Apolonio, así como las propiedades focales de unas y otras: los rayos que parten de un foco y se reflejan en la cónica pasan por el otro foco (en el caso de la elipse), siguen la recta "huyendo" del otro foco (en la hipérbola) o siguen una paralela al *eje* (si es una parábola); propiedades que han sido utilizadas (y lo siguen siendo) en la técnica, desde los inventos atribuidos a Arquímedes para incendiar las naves romanas en el asedio a Siracusa hasta la fabricación de espejos parabólicos para antenas.

Junto a las cónicas que acabamos de mencionar, hay casos "degenerados": cuando el plano pasa por el vértice del cono, lo cortará en un solo punto, en un par de rectas secantes o en una sola recta "doble". Además, si en vez de un cono tenemos un cilindro (que es como un caso límite, cuando la recta que gira no corta al eje sino que es paralela a él), la sección puede ser un par de rectas paralelas o el vacío. Todos estos caso se consideran cónicas degeneradas, y se colarán en nuestro estudio porque su expresión algebraica es similar a la de las cónicas "de pata negra".

En el siglo XVII, René Descartes introduce el Álgebra en la Geometría, revolucionándola con las coordenadas que llamamos "cartesianas" en su honor. Las cónicas se traducen por unas ecuaciones que resultan ser siempre de segundo grado; $x^2 + y^2 = R^2$ es la ecuación de una circunferencia, lo mismo que $x^2+y^2+ax+by+c=0$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es la de una elipse, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

y $xy = k$ representan hipérbolas, $y^2 = 2px$, $y = ax^2 + bx + c$ describen parábolas. La introducción de las coordenadas cartesianas en la Geometría, y la correspondiente "algebraización" que supone, cambia totalmente el enfoque del estudio de las cónicas, que pasan a verse como las curvas descritas mediante ecuaciones polinómicas de segundo grado.

Si se usan coordenadas polares, las cónicas se asocian a ecuaciones como $\rho(1 - \epsilon \cdot \cos\theta) = l$, donde ϵ es la llamada *excentricidad* de la cónica (que es igual a 1 en el caso de las parábolas, mayor en las hipérbolas, menor en las elipses y 0 en las circunferencias), y $2l$ es una longitud conocida como "latus rectum".

La relevancia de las cónicas en Astronomía es manifiesta si pensamos en las leyes de Kepler: los planetas decriben órbitas elípticas con el sol en uno de los focos. La ley de gravitación de Newton, al explicar el movimiento como debido a una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, obliga a que esas trayectorias sean cónicas: la excentricidad está relacionada con la energía del cuerpo que orbita. La caída de los graves en el campo gravitatorio terrestre es otro ejemplo de trayectorias cónicas. No diremos más de la importancia de estas curvas fuera de nuestra disciplina.

Una visión nueva surge con la Geometría proyectiva y el uso de coordenadas homogéneas, que no vamos a considerar aquí. La introducción del Álgebra Lineal y el cálculo matricial (hacia mediados del siglo XIX, por Cayley y Sylvester) permite tratar las cónicas y sus análogos en cualquier dimensión (*cuádricas*) de un modo muy eficaz, que es el que seguiremos en este capítulo.

Cónicas en el plano afín A^2

Definición.- En el plano afín A^2, con una referencia ortonormal (que bien puede ser la canónica), los puntos se identifican con sus coordenadas cartesianas, x, y. Dados unos coeficientes (es decir, unos números reales) $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}$, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación $a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ es una cónica.

Ejemplos: Las ecuaciones que aparecen unos párrafos más arriba ilustran algunos de los casos más notables de cónicas no degeneradas. Otros ejemplos, que muestran casos límite o degenerados, son $x^2 + y^2 = 0$, que representa un solo punto, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, que corresponde al vacío, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 = 0$ que describen dos rectas paralelas, dos rectas secantes y una recta doble, respectivamente.

Cuando nos den la ecuación de una cónica, tenemos que ser capaces de dar respuesta a dos preguntas: qué tipo de curva es (elipse, hipérbola, parábola, degenerada o no) y cuáles son sus elementos destacados (focos, ejes, centro de simetría, directriz, asíntotas). Vamos a aprender a dar esas respuestas con prontitud y seguridad.

Breve repaso de algunas cosas que seguramente conoce el alumno.-

Sin duda, el alumno reconoce en $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ la ecuación de una circunferencia, y es capaz de encontrar rápidamente su centro y su radio. Cumple así el doble propósito de clasificar la curva y señalar sus elementos destacados.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, corresponde a una elipse con focos en $(\pm c, 0)$, siendo $c^2=a^2-b^2$ (supuesto que $a>b>0$). Igualmente, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, describe una hipérbola con focos en $(\pm c, 0)$, siendo $c^2=a^2+b^2$; las asíntotas de esa hiperbola son las dos rectas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, o sea $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. La excentricidad de esas cónicas es c/a.

La parábola de foco $(p/2, 0)$ y cuya directriz es la recta $x=-p/2$ responde a la ecuación $y^2=2px$. Su eje de simetría coincide con la recta $y=0$, y tiene el vértice en el origen.

Si alteramos levemente esas ecuaciones, obtenemos cónicas degeneradas: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ es la ecuación de un solo punto; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, la del conjunto vacío (son elipses “extrañas”); $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ describe un par de rectas secantes (hipérbola degenerada); $y^2=0$ es una sola recta (contada dos veces), $y^2=1$ corresponde a dos rectas paralelas, $y^2=-1$ a unas rectas “imaginarias”: estamos ante casos degenerados de parábolas.

Vamos a estudiar ahora las cónicas en general para ser capaces de reducirlas a uno de esos tipos conocidos.

En la ecuación general de las cónicas, podemos distinguir tres partes:

La parte cuadrática, formada por los términos de segundo grado, $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$,

La parte lineal, que contiene los dos sumandos de primer grado $2a_{01}x+2a_{02}y$,

Un término constante (o de grado 0), a_{00}.

Empecemos estudiando la parte cuadrática, que determina el tipo de cónica y contiene casi toda la información esencial sobre ella. Si denotamos por X al vector columna $X=(x,y)^T$, y por A a la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces la parte cuadrática de la ecuación de la cónica se puede escribir como $X^T \cdot A \cdot X$. La matriz A es una matriz 2×2 simétrica, lo que garantiza que se puede diagonalizar por semejanza ortogonal. En términos más corrientes, un giro sirve para reducir A a la forma diagonal. Así pues, un giro reduce la parte cuadrática de la ecuación de la cónica a su expresión más sencilla: $\beta x'^2+\gamma y'^2$, donde β, γ son los autovalores de la matriz A, y llamamos x', y' a las nuevas coordenadas. La ecuación de la cónica se ve así: $\beta x'^2 + \gamma y'^2 + 2b_{01}x' + 2b_{02}y' + b_{00} = 0$. Según sean los signos de los autovalores de A, podemos distinguir diversos tipos de cónicas:

Cuando los dos autovalores, β, γ, tienen el mismo signo, la cónica es de tipo elíptico. Su ecuación se puede simplificar aún más mediante una traslación que elimina los términos de primer grado (puede plantearse como ejercicio sencillo, o bien esperar unos minutos para verlo), de modo que se reduce a $\beta x^2 + \gamma y^2 + \alpha = 0$ (hemos vuelto a llamar x, y a las coordenadas después de la traslación). Si el término constante, α, es 0, esa elipse se reduce a un punto (una especie de elipse degenerada); si α tiene el mismo signo que los autovalores β, γ, la ecuación no tiene soluciones reales (y se habla de una elipse imaginaria); finalmente, si α tiene el signo contrario, estamos ante una elipse real, cuya ecuación se transforma fácilmente en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Cuando los dos autovalores tienen signos opuestos, la cónica es de tipo hiperbólico. También en este caso, la ecuación se simplifica mediante una traslación, y puede escribirse como $\beta x^2 + \gamma y^2 + \alpha = 0$. Si $\alpha = 0$, nos encontramos ante un par de rectas secantes (una hipérbola degenerada); si $\alpha \neq 0$ se trata de una hipérbola ordinaria, cuya ecuación se puede escribir como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Finalmente, si un autovalor de A es nulo, digamos que $\beta = 0$, entonces la ecuación de la cónica se ve así: $\gamma y'^2 + 2b_{01}x' + 2b_{02}y' + b_{00} = 0$. Nótese que no pueden ser nulos ambos autovalores, porque si lo fueran, la matriz A sería nula, y no tendríamos una ecuación de segundo grado, sino una de primero (es decir, en vez de una cónica tendríamos una recta). Ahora no es posible eliminar los términos de primer grado mediante una traslación; todo lo que se puede conseguir es dejar sólo el término en x' o el término independiente (según si es o no nulo es coeficiente b_{01}). Así, la ecuación reducida se lee (después de dividir por γ) $y^2 - 2px = 0$ o $y^2 + \alpha = 0$. En el primer caso tenemos una parábola; en el segundo, tenemos dos rectas paralelas (si α es negativo), una recta doble (si es 0) o el vacío (si es positivo; suele hablarse de "un par de rectas imaginarias paralelas"en este caso): los tres casos se consideran parábolas degeneradas.

Se advierte que los tres casos son fáciles de detectar sin más que calcular el determinante de la matriz A, δ, puesto que es igual al producto de sus autovalores. Así, la cónica será de tipo elíptico cuando $\delta > 0$, hiperbólico cuando $\delta < 0$ y parabólico si $\delta = 0$. Para saber si se trata de una cónica degenerada o de una ordinaria, hay que mirar si se anula o no el determinante de la matriz "ampliada"

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplos y ejercicios: Escriba las matrices que corresponden a las cónicas citadas hasta el momento. Calcule en cada caso el determinante de la matriz A y el de la matriz ampliada. Observe los resultados y compárelo con lo aquí expuesto.

Ejemplos de cónicas degeneradas.- Las ecuaciones $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + 1 = 0$ describen respectivamente a un par de rectas secantes, un par de rectas paralelas, una recta doble, un punto y el vacío. Los dos últimos casos se describen a veces como un par de rectas imaginarias secantes o paralelas, puesto que las ecuaciones se pueden escribir como $(x+iy)(x-iy)=0$, $(x+i)(x-i)=0$. Puede verse que esos ejemplos agotan las posibilidades de tipos de cónicas degeneradas. Se suele decir que el par de rectas (reales) secantes es una cónica degenerada *de tipo hiperbólico*, el punto, o par de rectas imaginarias secantes, es una *de tipo elíptico*, y las otras son *de tipo parabólico*, lo cual está bien traído, si se piensa un poco.

Centro y ejes de una cónica. Otros elementos notables

Si en la ecuación $a_{00}+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ hacemos un cambio de variable $x'=x-a, y'=y-b$ (que corresponde a una traslación), observamos que la parte cuadrática no se ve afectada, y la parte lineal se transforma en $(2a_{11}a+2a_{12}b+2a_{01})x'+(2a_{12}a+2a_{22}b+2a_{02})y'$. Si elegimos los valores a, b de modo que esas expresiones se anulen, habremos simplificado la ecuación, eliminando su parte lineal: quedará así $b_{00}+a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2=0$, donde se observa que si un punto de coordenadas x', y' está en la cónica, también estará el punto de coordenadas $-x', -y'$; es decir, hemos trasladado el origen a un punto que es centro de simetría de la curva. Así pues, el centro de la cónica será el punto cuyas coordenadas $x=a, y=b$ sean solución del sistema

$$\begin{cases} 2a_{11}a+2a_{12}b+2a_{01}=0 \\ 2a_{12}a+2a_{22}b+2a_{02}=0 \end{cases}$$

Nótese que la matriz de los coeficientes de ese sistema es la matriz A, por lo que la cónica tendrá centro cuando el determinante $|A|$ no se anule, es decir, cuando sea una cónica de tipo elíptico o hiperbólico. Las parábolas no tienen centro (si bien una parábola degenerada puede tener una “recta de centros”). Por otra parte, es útil observar que las dos ecuaciones son sencillamente las derivadas parciales de la ecuación de la cónica igualadas a 0.

Los ejes de una elipse, lo mismo que los de una hipérbola, son muy sencillos de calcular: serán las rectas que pasan por el centro de simetría y tienen como vectores directores los autovectores de la matriz A. La razón es clara: al coger esos ejes, la matriz A se diagonaliza y en la ecuación desaparece el término en xy, quedando solamente el término constante y los términos en x^2 e y^2, lo que pone en evidencia la simetría tanto respecto de una variable como de la otra.

Ejemplo: La ecuación $4x^2+4y^2+2xy-6x+6y-4=0$ representa una cónica que vamos a escudriñar. Como el determinante de la matriz A es positivo, se trata de una elipse (o al menos de una cónica del tipo elíptico). El centro se calcula resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 8x+2y-6=0, \\ 2x+8y+6=0 \end{cases}$$

lo que nos da para el centro las coordenadas $(1,-1)$. Los autovalores de la matriz A son 3 y 5, con autovectores asociados $(1,-1)$ y $(1,1)$, por lo que las rectas que pasan por el centro con pendientes ± 1 (es decir, las rectas $x-y=2, x+y=0$ son los ejes de la elipse. Se trata de una elipse real, puesto que contiene puntos reales, como el $(2,0)$ y el $(0,-2)$.

Ejemplo: La cónica de ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 6y - 4 = 0$ no tiene centro: es una parábola. Podemos trabajar con su ecuación, completando los cuadrados para obtener $(x + y)^2 - 6x + 6y - 4 = 0$, y haciendo el cambio $x + y = u, x - y + 2/3 = v$ simplificarla para que quede $u^2 = 6v$. Ahí leemos directamente todos los elementos: puesto que la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ tiene el vértice en el origen, el eje de simetría coincide con la recta $y = 0$, el foco está en $x = p/2, y = 0$ y la directriz es la recta $x = -p/2$, concluimos que nuestra parábola tiene su vértice en el punto de coordenadas $u = v = 0$, su eje es la recta $u = 0$, su foco está en $u = 0, v = 3/2$ y su directriz es la recta $v = -3/2$; volviendo a las coordenadas antiguas, tenemos el vértice en $x = -1/3, y = 1/3$, el foco en $x = 5/12, y = -5/12$, el eje es $x + y = 0$ y la directriz $x - y + 13/6 = 0$.

El último ejemplo ilustra cómo podemos abordar el estudio de una cónica sin centro (o sea, una de tipo parabólico), manipulando la ecuación para completar cuadrados y simplificar la parte lineal. También podemos observar que en ese tipo de cónicas, la matriz A tiene un autovalor nulo, y los autovectores asociados dan la dirección del eje de la parábola: en el ejemplo anterior, un autovector asociado al autovalor nulo es $(1, -1)$, por lo que el eje de la parábola tendrá pendiente -1. Para determinarlo, sólo nos falta encontrar el vértice (puesto que el eje pasa por él), y eso lo hacemos observando que la tangente a la parábola por el vértice será perpendicular al eje, luego tendrá pendiente 1. Del haz de rectas $y = x + c$ con esa pendiente, seleccionamos la que sólo corta a la parábola en un punto (al cortar esa recta con la parábola nos queda la ecuación $4x^2 + 4cx + c^2 + 6c - 4 = 0$: para que tenga sólo una solución, el discriminante debe ser nulo, lo que nos da $c = 2/3$, por lo que $y = x + 2/3$ es la ecuación de la tangente a la parábola por el vértice, el propio vértice es el punto de corte de esa tangente con la curva, que resulta ser $x = -1/3, y = 1/3$. El eje será la recta que pasa por ahí con pendiente -1, esto es, $x + y = 0$. La directriz será una recta perpendicular al eje ($y = x + d$), y el foco será un punto situado sobre el eje (de coordenadas $f, -f$, por tanto); si imponemos que el punto (x, y) equidiste de esa recta y ese punto, llegamos a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - (4f + 2d)x + (4f + 2d)y + 4f^2 - d^2 = 0$, que comparada con la ecuación original nos lleva a escribir el sistema

$$\begin{cases} 4f + 2d = 6, \\ 4f^2 - d^2 = -4 \end{cases}$$

cuya solución es $f = 5/12, d = 13/6$: la misma que obtuvimos antes por otro método.

Ejemplos y ejercicios: La ecuación $7+10x-10y+x^2+4xy+4y^2 = 0$ representa una parábola. Los términos cuadráticos $x^2+4xy+4y^2$ constituyen un cuadrado perfecto $(x+2y)^2$. Hacemos el cambio de variable $x' = 2x-y, y' = x+2y$, (que equivale a $x = (2x'+y')/5, y = (-x'+2y')/5$), y la ecuación se escribe $y'^2+6x'-2y'+7 = 0$; ahora hacemos $v = y'-1$, que nos da $v^2+6x'+6 = 0$, y por último $u = x'+1$ deja la curva como $v^2+6u = 0$. Esa ecuación es ya la reducida, en la que leemos todos los elementos: por ejemplo, el foco está en el punto de coordenadas $u = -3/2, v = 0$ y la directriz tiene por ecuación $u = 3/2$. Deshaciendo los cambios resulta $x = -4/5, y = 9/10$ para las coordenadas del foco, $4x - 2y - 1 = 0$ como la ecuación de la directriz.

Haga otro tanto con la parábola de ecuación $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 300x - 400y + 2500 = 0$

Se suele llamar ecuación reducida de una cónica a la ecuación que resulta al elegir el sistema de referencia de esa manera: llevando el origen al centro de la cónica y eligiendo los vectores de la base en las direcciones de los autovectores de A'. Las rectas que pasan por el centro de la cónica y tienen las direcciones de los autovectores de A' se llaman ejes de la cónica, y serán perpendiculares, puesto que los autovectores asociados a autovalores diferentes son ortogonales. La circunferencia es la excepción, puesto que en ese caso A' tiene un autovalor doble y todas las direcciones son autovectores, por lo que todas las rectas que pasan por el centro de la circunferencia le sirven como ejes. Nótese que en todo caso los ejes de una cónica son ejes de simetría para ella, pues al cambiar de signo a x o a y no se modifica la ecuación.

En una cónica con centro (elipse o hipérbola) las rectas que pasan por él y siguen las direcciones de los autovectores de A' se llaman *ejes de la cónica*, y son en efecto ejes de simetría, puesto que la ecuación de la cónica referida a esos ejes es la ecuación reducida. Los ejes son perpendiculares, porque los autovectores asociados a los autovalores de A' son ortogonales al ser distintos los autovalores (se excluye el caso de la circunferencia, que tiene por eje de simetría cualquier recta que pase por su centro). Los puntos en que los ejes cortan a la elipse o a la hipérbola se denominan *vértices*; la elipse tiene cuatro vértices (si no es una circunferencia), mientras que la hipérbola sólo tiene dos (a veces se dice que tiene dos vértices reales y otros dos imaginarios), porque uno de los ejes no la corta. Escritas en la forma reducida, $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, los vértices de la elipse son los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, y los de la hipérbola son $(\pm a, 0)$.

Otros puntos notables de las elipses y las hipérbolas son los focos. Conviene saberlos calcular cuando esas curvas se nos presentan con sus ecuaciones reducidas. Si la elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$, entonces los focos están en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. El cociente $\epsilon = c/a$ se conoce como *excentricidad* de la elipse. Del mismo modo, la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene sus focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. También aquí, el cociente $\epsilon = c/a$ se conoce como *excentricidad* de la hipérbola. Nótese que la excentricidad de la elipse es menor que 1 y la de la hipérbola es mayor (la de la parábola es igual a 1, y la de la circunferencia es 0). El foco de la parábola $y^2 = 2px$ está situado en el punto $(p/2, 0)$, y la directriz es la recta $x = -p/2$. También las elipses e hipérbolas tienen directrices (de hecho, tienen dos), pero no creo que valga la pena hablar mucho de ellas.

Tangentes a una cónica. Asíntotas

Hay varios métodos para encontrar la ecuación de la tangente a una cónica por un punto, tanto si yace sobre ella, como si no. Uno elemental consiste en considerar el haz de rectas que pasan por ese punto y ajustar el parámetro para que sólo corte a la cónica en un punto. También podríamos echar mano del cálculo de derivadas y así hallar la pendiente que ha de tener esa tangente, y aún hay otros procedimientos. Vamos a ver algunos ejemplos que lo aclaran.

Ejemplos y ejercicios.- Para hallar la tangente a la elipse de ecuación $x^2 + 2xy + 2y^2 - 5 = 0$ por el punto $(1, 1)$, consideramos el haz de rectas $y - 1 = m(x - 1)$; cada recta del haz corta a la elipse en unos puntos que resultan al sustituir $y = 1 + mx - m$ en la ecuación de la elipse. Eso nos lleva a $(1 + 2m + 2m^2)x^2 + (2 + 2m - 4m^2)x + (2m^2 - 4m - 3) = 0$, ecuación de segundo grado que tendrá una sola solución (lo que indica que la recta sólo corta a la elipse en un punto) cuando su discriminante sea 0. Operando resulta que ese discriminante es $9m^2 + 12m + 4$, que se anula cuando $m = -2/3$. Así, por ese punto pasa una sola tangente a la elipse (pues el punto yace sobre ella), que tiene por ecuación $2x + 3y - 5 = 0$. En este caso, se podría haber calculado la pendiente más fácilmente derivando implícitamente en la ecuación de la curva.

Si intentamos calcular la tangente a esa misma elipse por el origen, consideramos el haz de rectas $y = mx$, y nos encontramos con la ecuación $(1+2m+2m^2)x^2 - 5 = 0$, cuyo dicriminante es negativo, valga m lo que valga. Eso indica que por ese punto no pasan tangentes a la elipse (pues el origen está dentro de ella). En cambio, por el punto exterior $(0, 3)$ pasan dos tangentes, que responden a la ecuación $y = mx + 3$ donde $m = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{10}$, que resulta al anular el discriminante de la ecuación $(1 + 2m + 2m^2)x^2 + (12m + 6)x + 13 = 0$ que se obtiene sustituyendo la ecuación de la recta en la de la elipse.

Calcule las tangentes a la hipérbola $xy = 4$ por los puntos $(2, 2)$, $(-1, -4)$, $(8, 0)$.

Por su parte, las hipérbolas tienen asíntotas, que son dos rectas a las cuales se van acercando sus ramas según se alejan del centro. Para encontrarlas hay, como de costumbre, diversas formas; una muy natural consiste en considerar el haz de rectas que pasan por el centro de la hipérbola y determinar la pendiente para que no corte a la cónica. Otra manera (acaso más sencilla) pasa por escribir la hipérbola en la forma reducida $u^2/a^2 - v^2/b^2 = 1$: ahí se leen directamente las asíntotas, pues vienen dadas por $u^2/a^2 - v^2/b^2 = 0$, que es la unión de las dos rectas $u/a - v/b = 0$ y $u/a + v/b = 0$.

Ejemplos y ejercicios.- Calcule los focos, directrices y asíntotas de la hipérbola $3x^2 + 4xy - 16 = 0$. También de $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

<u>Invariantes de una cónica.</u>

Es fácil ver que los escalares $\Delta = |A^*|$, $\delta = |A|$ y $s = tr(A)$ son invariantes por traslaciones y por giros (los dos últimos son el producto y la suma de los autovalores de la submatriz A, que vimos que se conserva en las traslaciones, y los giros no pueden afectarles). Con ayuda de esos invariantes se pueden clasificar fácilmente todas las cónicas:

1.- Si $\delta < 0$, la cónica es de tipo hiperbólico. Será una hipérbola si $\Delta \neq 0$, y un par de rectas secantes (hipérbola degenerada) si $\Delta = 0$.

2.- Si $\delta = 0$, la cónica es de tipo parabólico. Será una parábola si $\Delta \neq 0$, y una parábola degenerada (una recta doble, un par de rectas paralelas o el vacío) si $\Delta = 0$.

3.- Si $\delta > 0$, la cónica es de tipo elíptico. Será una elipse (real o imaginaria) si $\Delta \neq 0$, y un punto (elipse degenerada) si $\Delta = 0$. Podemos distinguir entre la elipse real y la imaginaria mirando el producto $s\Delta$: si es negativo estamos ante una elipse real, y si es positivo la elipse es imaginaria (o sea, es el vacío).

Ejercicio.- Una hipérbola se llama *equilátera* cuando sus asíntotas son perpendiculares. Compruebe que una CNS para que una hipérbola sea equilátera es que el invariante s se anule.

Cónica que pasa por cinco puntos dados.- Es bien sabido que por cinco puntos dados en un plano pasa en general una cónica, del mismo modo que por dos pasa una recta y por tres puntos dados en el espacio pasa un plano (siempre que no estén situados de una forma excesivamente regular: si están alineados, por ellos pasan infinitos planos; por eso suele hablarse de puntos situados "en posición general", para indicar de un modo algo impreciso que no sea un caso especial): Algebraicamente, el hecho es claro: al igual que los tres coeficientes de la ecuación de una recta se determinan (salvo proporcionalidad) con dos condiciones, y los cuatro del plano con tres, los seis coeficientes que aparecen en la ecuación general de una cónica se determinan imponiendo cinco condiciones, y una forma de hacerlo es que pasen por cinco puntos (Otras serían pedir condiciones de tangencia, por ejemplo, o ser de tipo parabólico). La cuestión que quiero abordar es cómo hallar la cónica que pasa por cinco puntos dados.

Se puede invocar una fórmula cabalística que dé directamente la ecuación de esa cónica (conozco una que involucra un determinante 6×6, que además es muy lógica), pero prefiero presentar otra manera de resolverlo: se aparta uno de los puntos, quedando solamente cuatro: A, B, C, D; es fácil encontrar dos cónicas que pasan por ellos, sin ir más lejos, la cónica degenerada que resulta al unir las rectas AB y CD y la que resulta al unir las rectas AC y BD; el haz de cónicas que determinan esas dos contiene un parámetro que se puede ajustar para que la cónica pase por el quinto punto. Veamos un ejemplo:

Ejemplo.- Para hallar la cónica que pasa por los puntos $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1), D = (1,2), E = (3,1)$, nos olvidamos de momento del último y escribimos las cónicas $y(y-x-1) = 0$ y $x(x-1) = 0$, que son cónicas degeneradas obvias que pasan por los cuatro primeros. El haz que determinan es $y^2 - xy - y + \lambda(x^2 - x) = 0$. Al imponer que pase por el quinto punto, tenemos $-3 + 6\lambda = 0$, de donde $\lambda = 1/2$, y la cónica buscada tiene por ecuación $x^2 + 2y^2 - 2xy - x - 2y = 0$. La comprobación es inmediata.

Haces de cónicas.- Acabamos de hablar del haz de cónicas que determinan dos de ellas. Creo que no requiere mayor explicación: si las ecuaciones de las cónicas dadas son $f(x,y) = 0$ y $g(x,y) = 0$, el haz viene dado por $\lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = 0$, o más brevemente por $f(x,y) + \mu g(x,y) = 0$ (dividiendo por el primer coeficiente; hay que recordar aquí las consideraciones que se hicieron al hablar de haces de rectas y de planos). Con ayuda de los haces de cónicas podemos abordar diversos problemas, que se pueden ilustrar con algunos ejemplos (el de la cónica que pasa por cinco puntos es uno).

Ejemplo.- Para hallar la parábola que pasa por los puntos $A = (1, 0), B = (0, 1)$ y es tangente en cada uno de ellos al eje correspondiente, podemos pensar en la hipérbola degenerada $xy = 0$ y en la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, que obviamente pasan por esos puntos con la tangencia requerida. Podemos escribir el haz que determinan como $x^2+y^2-2x-2y+1+2\lambda xy = 0$; todas las cónicas de ese haz cumplen las condiciones, salvo la de ser parábola. El determinante de A se anula cuando $\lambda^2 = 1$; el caso $\lambda = 1$ nos da $(x+y-1)^2 = 0$, que es una parábola degenerada (un par de rectas paralelas); $\lambda = -1$ nos da finalmente una parábola: $(x - y)^2 = 2(x + y - 1/2)$; determinar su foco y su directriz es una tarea sencilla que dejo como ejercicio.

Parametrización de una cónica.

A veces las cónicas se nos presentan como trayectorias (pensemos en las órbitas de los planetas, o en un cuerpo que cae), de modo que más que como curvas "hechas"es natural verlas como curvas que se van describiendo a medida que transcurre el tiempo. Así, las coordenadas x, y serán función del tiempo, o de otro parámetro. Además, para calcular longitudes de las curvas y áreas encerradas por ellas es muy conveniente disponer de parametrizaciones, como se verá muy pronto en la asignatura de Cálculo II. Veamos, pues cómo se pueden parametrizar las elipses, hipérbolas y parábolas.

Para empezar, la conocida fórmula de la trigonometría $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$ sugiere parametrizar la circunferencia de radio 1 mediante $x = \cos(t), y = \sin(t)$, donde el parámetro t recorre el intervalo $[0, 2\pi]$ (o algún otro intervalo de esa misma longitud); si t recorre un intervalo menor, estaremos describiendo un arco de la circunferencia; y si recorre uno mayor, estaremos recorriendo algún arco varias veces. Desde luego, hay otras parametrizaciones de la circunferencia, peo ésa es muy natural, y el parámetro t admite una interpretación muy sencilla: es el ángulo central.

Por lo mismo, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se puede parametrizar mediante $\frac{x}{a} = \cos(t)$, $\frac{y}{b} = \sin(t)$, o sea, $x = a\cos(t), y = b\sin(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ necesitamos partir de una fórmula semejante a $\cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$ pero con el signo cambiado: la trigonometría hiperbólica nos la suministra: $\cosh^2(t)-\sinh^2(t) = 1$, de donde se sigue la parametrización $x = a\cosh(t), y = b\sinh(t)$, para $t \in \mathbf{R}$. Recordemos que el seno hipérbolico y el coseno hiperbólico está definidos por $\sinh(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

La parábola es mucho más sencilla de parametrizar, puesto que puede verse como la gráfica de una función. Así, $y = x^2$ se parametriza por $x = t, y = t^2$; $y^2 = 2px$ se puede parametrizar como $x = 2pt^2, y = 2pt$, entre otras opciones.

Cuádricas

Saltando del plano afín A^2 al espacio afín A^3, el papel de las cónicas lo van a desempeñar las cuádricas, que son superficies definidas por ecuaciones polinómicas de segundo grado $a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$. Con seguridad, algunas cuádricas ya son más o menos conocidas: esferas, conos, cilindros, elipsoides, ... Los conocidos espejos parabólicos no son más que paraboloides de revolución.

Su estudio es similar al de las cónicas, con una complejidad algo mayor debida al aumento en el número de variables. Al igual que en el caso de las cónicas, hay cuádricas con centro (elipsoides e hiperboloides) y cuádricas sin centro (paraboloides); el centro se determina (cuando lo hay) resolviendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, análogo al del caso de las cónicas: se igualan a 0 las derivadas parciales de la ecuación de la cuádrica. Los ejes de una cuádrica se determinan con los autovectores de la matriz A que corresponde a su parte cuadrática o parte principal: si los tres autovalores de A son distintos, obtenemos los ejes de manera inequívoca; si hay autovalores repetidos, tenemos muchos autovectores, lo que corresponde a una cuádrica de revolución; el caso análogo en cónicas sería el de la circunferencia, donde no hay ejes privilegiados.

Quiero subrayar la importancia que tienen esos elementos en otras disciplinas. Así, el llamado elipsoide de inercia o elipsoide de Poinsot (en el estudio del giro de un sólido rígido), cuyos ejes recogen los momentos principales de inercia, o el elipsoide de Fresnel en la propagación y amortiguación de ondas electromagnéticas.

Siguiendo con la analogía entre cuádricas y cónicas, hay cuádricas degeneradas (como un par de planos, un cilindro o un cono) y no degeneradas (como elipsoides, hiperboloides y paraboloides); también podemos encontrar las ecuaciones reducidas de las cuádricas y sus invariantes métricos (que permiten clasificarlas, y que no vamos a estudiar aquí), etc. Nos conformaremos con citar las ecuaciones reducidas de algunas de ellas:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ representa un elipsoide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ representa un hiperboloide de dos hojas

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ representa un hiperboloide de una hoja

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ representa un paraboloide elíptico

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ representa un paraboloide hiperbólico

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ representa un cono

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ representa un cilindro elíptico

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ representa un cilindro hiperbólico

$y^2 - 2px = 0$ representa un cilindro parabólico.

Cuando cortamos una cuádrica por un plano obtenemos una cónica. Es fácil comprender la razón: si el plano tiene por ecuación $z = 0$ (lo que siempre se puede conseguir eligiendo coordenadas de modo adecuado), en la ecuación de la cuádrica se eliminan los términos en z, quedando una ecuación de segundo grado en las otras dos variables, que representa una cónica.

Por otra parte, es fácil reconocer las diferentes cuádricas en su forma canónica (al menos, la mayoría) observando qué cónicas resultan al cortarlas con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos. Por ejemplo, al cortar la cuádrica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ con los planos $x=0$, $y=0$ y $z=0$ resultan un par de rectas secantes (en los dos primeros casos) y un punto en el tercer caso, lo que revela que la cuádrica en cuestión es un cono. Del mismo modo, reconocemos que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ representa un hiperboloide de una hoja y $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ representa uno de dos hojas porque al cortar con el plano $z=0$ nos queda una elipse en un caso ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$) y el vacío en otro ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$). No es necesario memorizar la lista de cuádricas: se deducen con facilidad por este procedimiento.

Ejemplos y ejercicios.- El plano $z=0$ es tangente al paraboloide $x^2-y^2+z=0$ en el origen; halle su intersección con el paraboloide e identifique el resultado. El plano tangente al hiperboloide $x^2+y^2-z^2=1$ en el punto $(1,0,0)$, es el plano $x=1$; cortándolo con el hiperboloide nos queda $y^2-z^2=0$, que es la unión de las rectas $y=\pm z$ en el plano $x=1$. Los planos horizontales $z=k$ cortan al elipsoide $x^2/2+y^2/3+z^2/6=1$ en curvas que responden a la ecuación $x^2/2+y^2/3=1-k^2/6$ que son elipses (reducidas a un punto si $k^2=6$, e imaginarias si k rebasa el valor $\sqrt{6}$); estudie los cortes por planos $x=cte$ e $y=cte$. Haga lo mismo con la cuádrica $x^2-2y^2+3z^2=0$

Sin entrar a fondo en cómo podemos parametrizar las cuádricas, quiero comentar que una esfera se parametriza cómodamente: si tomamos el origen en el centro de la esfera y el radio es 1, entonces podemos escribir x,y,z en función de dos parámetros: u,v, ($u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi]$), de este modo:

$$\begin{cases} x=\sin(u).\cos(v)\\ y=\sin(u).\sin(v)\\ z=\cos(u)\end{cases}$$

Por consiguiente, el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ se parametriza como

$$\begin{cases} x=a.\sin(u).\cos(v)\\ y=b.\sin(u).\sin(v)\\ z=c.\cos(u)\end{cases}$$

Algunas cuádricas son superficies regladas, es decir, están generadas por una recta móvil. El paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja son "doblemente regladas", pues contienen dos familias distintas de rectas. Esta circunstancia les confiere propiedades interesantes desde el punto de vista de su estructura, y hace que se empleen en construcciones diversas. Así, desde chimeneas de ventilación de centrales nucleares hasta edificios tan notables como la torre de Kobe o la torre de televisión de Cantón (de varios cientos de metros de altura) tienen forma de hiperboloide de una hoja, al igual que la catedral de Brasilia, del recientemente fallecido arquitecto Oscar Niemeyer. En Madrid tenemos las tribunas del hipódromo de la Zarzuela, que fueron diseñadas por el ingeniero de caminos Eduardo Torroja Miret (y han sido declaradas monumento histórico artístico), y la iglesia de nuestra señora de Guadalupe, con forma de sombrero mejicano, cuya cubierta está formada por ocho paraboloides hiperbólicos (su construcción fue dirigida por el arquitecto Félix Candela, con la colaboración de Eduardo Torroja Cavanillas, ingeniero de caminos, hijo del anterior Torroja). A unos cientos de kilómetros, la torre de control del aeropuerto de Barcelona muestra una evidente estructura hiperbólica.

Pueden ver imágenes de estos y otros edificios en su ordenador. Sugiero que abran la página $http : //es.wikipedia.org/wiki/Estructurahiperboloide$ y que se aventuren a navegar un rato. Otra dirección de internet en la que pueden encontrar muchas cosas interesantes sobre cónicas (y sobre muchos otros asuntos) es http://www.cut-the-knot.org/

Rebajando el nivel de los ejemplos, vemos hiperboloides de una hoja en algunos objetos domésticos como papeleras y otros recipientes (algunos plegables fácilmente, debido a la geometría de esas superficies). Una conocida marca de patatas fritas presenta sus productos envasados en un bote cilíndrico, y las patatas tienen una notoria forma de paraboloide hiperbólico; ese diseño favorece el almacenamiento eficaz y el transporte sin fracturas, con ventaja para el negocio.

Para no cerrar el curso hablando de aperitivos, quiero mencionar una propiedad adicional de estas superficies, y es que tienen *curvatura negativa*: el plano tangente a un paraboloide hiperbólico o a un hiperboloide de una hoja por uno de sus puntos corta a la superficie en dos rectas, como se comprueba sin dificultad. En cambio, el plano tangente a un elipsoide no lo toca más que en un punto y deja todo el elipsoide a un lado: el elipsoide tiene curvatura positiva (conos y cilindros tienen curvatura nula, como el plano). Si trazamos un triángulo sobre un paraboloide hiperbólico o sobre un hiperboloide de una hoja, la suma de sus ángulos es menor que dos rectos, mientras que en el cono y en el cilindro es igual a dos rectos (como en el plano) y en la esfera (o el elipsoide) es mayor que dos rectos (el conocido *exceso esférico*). En esas superficies tenemos una Geometría diferente de la del plano, que se conoce como *Geometría no euclídea*, cuyo estudio no corresponde a esta asignatura.

Ejemplos y ejercicios.- Antes se dijo que el plano tangente al paraboloide $x^2 - y^2 + z = 0$ en el origen lo corta en dos rectas. El origen no tiene nada de particular a ese respecto, y la intersección del plano tangente en cualquier punto con esa cuádrica consiste en un par de rectas. Puede verse fácilmente si la parametrizamos haciendo $x + y = u, x - y = v$, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \\ z = u.v. \end{array} \right.$$

donde se ve claramente que la superficie está descrita por dos familias de rectas: $u = cte., v = cte.$ (por eso decimos que es doblemente reglada).

El hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ también contiene dos familias de rectas. Una manera rápida de verlo consiste en manipular la ecuación para escribirla como $(x + z).(x - z) = (1 + y).(1 - y)$, o mejor como $\frac{x+z}{1+y} = \frac{1-y}{x-z}$; igualando esos cocientes a una constante arbitraria, k, resultan las rectas

$$\begin{cases} x + z = k.(1 + y) \\ 1 - y = k.(x - z) \end{cases}$$

y de la misma manera al escribir la ecuación en la forma $\frac{x+z}{1-y} = \frac{1+y}{x-z} = k$ se obtiene otra familia de rectas contenida en el hiperboloide.