# Capítulo 8. Espacios afines.

## Introducción

En este capítulo vamos a presentar y desarrollar brevemente la estructura de espacio afín, que es el marco natural para hacer Geometría. Podría pensarse que el espacio vectorial es suficiente para ese propósito, pero hay un detalle que limar: si vemos los elementos de un espacio vectorial como "puntos", entonces hay uno especial: el origen. Sin embargo, en el plano y en el espacio ordinario todos los puntos tienen un mismo status; por eso queremos disponer de un modelo que recoja esa equivalencia entre todos los puntos. Además, las rectas y planos que se consideran al tratar de espacios vectoriales son los que pasan por el origen (puesto que el 0 está en todos los subespacios vectoriales; y nos gustaría hablar de rectas y planos que no pasen por ese punto distinguido. Por otra parte, las únicas aplicaciones que merecen consideración entre los espacios vectoriales son las lineales, que conservan el origen, lo que descarta algo tan natural como las traslaciones. Para dar respuesta a esta situación estudiamos los espacios afines.

Podríamos empezar es estudio de los espacios afines dando una definición axiomática y sacando el jugo que contenga (y ese enfoque se puede encontrar con facilidad en múltiples libros), pero prefiero abordarlo de una manera menos abstracta: un espacio afín puede verse como un subespacio vectorial trasladado, de modo que no contenga al origen (o que sí lo incluya; eso no sería más que un caso particular). Así pues, la definición que daremos es ésta:

*Definición*.- Un espacio afín, $A$, es un subconjunto de un espacio vectorial, $V$, que se obtenga desplazando un subespacio vectorial. Con más precisión:

Si $U$ es un subespacio vectorial de $V$ y $u \in V$ es un vector, el conjunto $\{v \in V : v - u \in U\}$ es un espacio afín. Lo denotaremos por $u + U$, porque está formado por los vectores que se obtienen sumando el vector $u$ con todos los vectores del subespacio $U$.

Se denomina dirección del espacio afín $u + U$ al subespacio vectorial $U$.

A los elementos de un espacio afín se les suele llamr "puntos", aunque en algunos casos puedan ser objetos con un aspecto particular.

*Ejemplos*:

Un subespacio vectorial es un espacio afín, pues se obtiene desplazándolo con el vector nulo: $U = 0 + U$. En particular, el espacio vectorial $V$ es un espacio afín. De hecho, los espacios $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ son posiblemente los espacios afines más conocidos. La estructura afín y la vectorial se solapan, sin que ello suponga molestia alguna. A veces se emplea la notación $A^2$ para referirse al plano ordinario, y $A^3$ para el espacio en donde solemos hacer Geometría elemental.

Una recta en $\mathbf{R}^2$ cuya ecuación sea $ax + by = c$ es un espacio afín cuya dirección es el espacio vectorial dado por la ecuación $ax + by = 0$. Análogamente, un plano y una recta en $\mathbf{R}^3$ son espacios afines cuyas direcciones son los subespacios vectoriales "paralelos" a ellos por el origen.

Las soluciones del sistema $A.X = b$ forman un espacio afín, que está contenido en el espacio afín $A^n$ (decimos que es un subespacio afín de él). Su dirección es el espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo $A.X = 0$. Eso es lo que expresa la conocida fórmula: "la solución general de un sistema no homogéneo es la suma de una solución particular con la solución general del sistema homogéneo asociado".

Otro tanto sucede con las soluciones de una ecuación diferencial lineal (que pronto estudiará el alumno): forman un espacio afín cuya dirección se obtiene resolviendo la ecuación diferencial lineal homogénea asociada. Esa estructura afín proporciona una valiosa estrategia para resolver tales ecuaciones diferenciales. En este espacio afín, los "puntos" son funciones.

Cualquier espacio afín es un subespacio del espacio "total" $V$, puesto que está contenido en él. Por eso, no hay diferencia apreciable entre hablar de espacio afín o de subespacio afín (de un subespacio de referencia).

Si $P$ y $Q$ son dos puntos distintos de un espacio afín, el vector $Q - P$ (también escrito $PQ$) genera un espacio vectorial de dimensión 1, $U = L(PQ)$; el subespacio afín $P + U$ es la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$. Análogamente, si tenemos un tercer punto que no esté en esa recta, $R$, los vectores $PQ, PR$ generan un plano vectorial, $U = L\{PQ, PR\}$, y el subespacio afín $P + U$ es el plano que pasa por los tres puntos dados.

*Definición*.- La dimensión de un espacio afín es la del espacio vectorial que le sirve de dirección.

*Observación*: El conjunto vacío se considera también un espacio afín; su interés es escaso. La dirección del vacío no está bien definida, pues sirve cualquier espacio vectorial, por lo que no está claro cuál será su dimensión. Suele adoptarse el valor $-1$ para $dim(\emptyset)$. En cualquier caso, nosotros no le vamos a prestar atención apenas.

Un espacio afín de dimensión 1 se llama *recta*; uno de dimensión 2, *plano*, y uno de dimensión $n$ que esté dentro de otro de dimensión $n + 1$, *hiperplano*.

Podría pensarse que en la definición de espacio afín el vector $u$ con el que desplazamos al subespacio vectorial tiene un papael destacado. En realidad no es así: cualquier vector del espacio afín sirve exactamente igual, lo que muestra que en los espacios afines no hay puntos distinguidos. Veámoslo:

*Proposición*.- Si $u'$ es un vector del espacio afín $u + U$, entonces $u' + U$ es el mismo espacio.

*Demostración*: Para comprobar que $u + U$ es igual a $u' + U$, vamos a ver que cada punto del primero está en el segundo y viceversa.

Sea, pues, $v \in u + U$, eso significa que $v - u \in U$; pero entonces $v - u'$ también está en $U$, pues es igual a $(v - u) + (u - u')$, que es la suma de dos vectores del subespacio vectorial $U$. Y como $v - u'$ está en $U$, $v$ estará en $u' + U$.

Del mismo modo, si $v \in u' + U$, entonces $v - u' \in U$; de donde se deduce que $v - u$ también está en $U$, pues es la suma de los dos vectores $(v - u') + (u' - u)$ que están en el subespacio vectorial $U$. Así que $v - u$ está en $U$, y $v$ está en $u + U$.

**Intersección y suma de subespacios**

Puede demostrarse fácilmente que la intersección de subespacios afines es un subespacio afín (quizá vacío), y que la dirección en el caso en que se corten es igual a la intersección de las direcciones de los esbespacios que se intersecan. Por ello, la dimensión de la intersección de los subespacios $L_1$ y $L_2$(si no es vacía) es igual a $dim(L_1 \bigcap L_2) = dim(U_1 \bigcap U_2)$, siendo $U_1$ y $U_2$ las respectivas direcciones.

Una manera sencilla de saber si dos subespacios afines se cortan o no es la siguiente (que enunciamos sin demostrar):

*Proposición*.- Una CNS pare que los subespacios $u + U_1$ y $v + U_2$ se corten es que el vector $v - u$ pertenezca a la suma $U_1 + U_2$.

Dado un subconjunto, $C$ de un espacio afín, $A$, la intersección de todos los subespacios afines que contienen a $C$ será el menor subespacio afín que lo hace, y se llama *variedad afín generada por* $C$. Podemos verlo de la manera siguiente: los vectores $PQ$, cuando los puntos $P$ y $Q$ recorren $C$, generan un subespacio vectorial de $V$, $U$; pues bien, el subespacio afín generado por $C$ es $P + U$, siendo $P$ un punto cualquiera de $C$.Así, la variedad afín generada por dos puntos es la recta que los contiene.

*Definición*.-La *suma* de dos (o más) subespacios afines es el subespacio afín generado por su unión.

Para la dimensión de la suma de dos subespacios afines, no cabe esperar una fórmula tan sencilla como para subespacios vectoriales ($dim(U_1+U_2) = dim(U_1)+dim(U_2)-dim(U_1 \bigcap U_2)$), como pone de manifiesto el caso de dos rectas que se cruzan en el espacio. La fórmula correcta ha de tener en cuenta si los subespacios se cortan o no, y es ésta:

Si $L_1 = P+U_1$ y $L_2 = Q+U_2$ se cortan, entonces la dimensión de la variedad suma $L_1+L_2$ es igual a $dim(L_1)+dim(L_2)-dim(L_1 \bigcap L_2)$, con una fórmula análoga a la del caso de subespacios vectoriales.

Si $L_1 = P + U_1$ y $L_2 = Q + U_2$ no se cortan, entonces la dimensión de la variedad suma $L_1 + L_2$ es igual a $dim(L_1) + dim(L_2) - dim(U_1 \bigcap U_2) + 1$.

**Paralelismo**

Relacionada con la idea de que dos variedades puedan no cortarse está la noción de paralelismo. Hay cierta división de opiniones acerca de a qué subespacios debe llamarse paralelos: en ocasiones considera que basta con que los direcciones coincidan, otras veces se pide además que no se corten (paralelismo estricto, podríamos llamarlo). Aquí adoptaremos esta definición:

*Definición*.- Dos subespacios de un espacio afín, $U_1$ y $U_2$ se llaman *paralelos* si sus direcciones coinciden o una de ellas está contenida en la otra.

Con esa definición, dos variedades paralelas pueden cortarse, pero en ese caso serán la misma variedad o bien una será subvariedad de la otra. Eso corresponde a considerar como paralelas dos rectas coincidentes, y una recta contenida en un plano como paralela a éste. Cuando dos subespacios afines no se cortan ni son paralelos, decimos que *se cruzan* (como dos rectas en el espacio que no sean coplanarias).

**Sistemas de referencia. Coordenadas**

Al igual que en un espacio vectorial una base nos permite estudiar cómodamente los vectores y los subespacios vectoriales, en los espacios afines nos servimos de sistemas de referencia.

*Definición*.- Un sistema de referencia en un espacio afín $A = u + U$ es un par $(P, B)$ formado por un punto $P \in A$ y una base de $U$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Solemos escribirlo así: $(P; v_1, \ldots, v_n)$.

*Definición*.- Sea $(P; v_1, \ldots, v_n)$ un sistema de referencia, y sea $Q$ un punto cualquiera de $A$. Llamamos *coordenadas cartesianas* de $Q$ en ese sistema de referencia a las coordenadas del vector $PQ$ en la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

*Observación*: Cuando damos un sistema de referencia $(P; v_1, \ldots, v_n)$ estamos dando $n + 1$ puntos: $P_0 = P, P_1 = P + v_1, \ldots, P_n = P + v_n$. Por ello, si tenemos $n + 1$ puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ tales que los vectores $v_k = P_0P_k$ sean linealmente independientes podemos decir que tenemos un sistema de referencia. Algunos textos lo hacen así, otros lo llaman "base afín".

*Cambio de coordenadas al cambiar el sistema de referencia*.- Si en un espacio afín tenemos dos sistemas de referencia, $(P, B)$ y $(P', B')$, un mismo punto $Q$ se expresa de maneras diferentes en uno y otro, es decir, que tendrá unas coordenadas cartesianas, $x^k$, en el primer sistema de referencia y otras distintas, $y^k$, en el otro. No es difícil ver cómo cambian las coordenadas cartesianas: en primer lugar, supongamos que solamente desplazamos el origen de $P$ a $P'$, pero no modificamos la base $B$ (hacemos, pues, una traslación); en este caso, se tiene $PQ = PP' + P'Q$ es decir $\sum x^k v_k = \sum p^k v_k + \sum y^k v_k$, de donde se deduce que $x^k = p^k + y^k$, que son las ecuaciones de la traslación; si se quiere escribir con las matrices será $X = T + Y$. Supongamos ahora que además hay un cambio de la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y que la matriz de paso es $A = (a_k^j)$, de modo que $u_j = \sum a_j^k v_k$, entonces el cambio se escribe como $X = T + A \cdot Y$ o desarrollado $x^k = p^k + \sum a_j^k y^j$, puesto que $PQ = PP' + P'Q$ se traduce por $\sum x^k v_k = \sum p^k v_k + \sum y^j u_j = \sum p^k v_k + \sum y^j a_j^k v_k$, de donde se sigue la fórmula anterior.

*Ejemplo*: En el plano $A^2$, elegimos la referencia $R_1 = (P, B)$ donde $P = (0, 0)$ y $B$ es la base canónica, y la referencia $R_2 = (P', B')$ donde $P' = (3, 2)$ y $B' = \{u_1, u_2\}$ siendo $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$. Sea $Q$ el punto $(4, 5)$ cuyas coordenadas en la primera referencia son $x^1 = 4, x^2 = 5$ y en la segunda son $y^1 = 2, y^2 = -1$ (puesto que el vector $P'Q = (1, 3)$ es igual a $2u_1 - u_2$). Como la matriz de cambio de base es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la fórmula $X = T + A \cdot Y$ se escribe en este caso como

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

*Coordenadas baricéntricas*.- Las coordenadas cartesianas, tan fáciles de definir y manejar, tienen el inconveniente de que dan un papel destacado a un punto, en contra de la esencia de espacio afín. Hay otro tipo de coordenadas que no adolecen de ese defecto, aunque puedan resultar menos obvias: son las llamadas *coordenadas baricéntricas*, que se definen así:

Sean $P_0, P_1, \ldots, P_n$ puntos en un espacio afín que constituyan un sistema de referencia afín (o una base afín, si se prefiere). Cualquier punto $P$ del espacio afín se puede escribir de una sola manera como $P = P_0 + \sum x^k v_k$ donde $v_k = P_0 P_k$ es el vector que va de $P_0$ a $P_k$, denotado también por $P_k - P_0$. Si jugamos con esta última notación, podemos escribir $P = P_0 + \sum x^k (P_k - P_0) = (1 - \sum x^k) P_0 + \sum x^k P_k = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$, donde la suma de los escalares $\lambda_j$ es igual a 1. Esos escalares son las coordenadas baricéntricas del punto $P$ en el sistema de referencia dado. Es claro cómo pasar de coordenadas cartesianas a las baricéntricas: basta añadir una primera coordenada $\lambda_0 = 1 - \sum x^k$.

*Ejemplos*.- Si tenemos dos puntos distintos, $P_0, P_1$, forman un sistema de referencia en la recta que determinan. Cualquier punto de esa recta se escribe como $\lambda P_0 + (1 - \lambda) P_1$; así pues, $\lambda, 1 - \lambda$ sirven como coordenadas baricéntricas de los puntos de la recta. Cuando $\lambda$ está entre 0 y 1, el punto está en el segmento delimitado por los puntos $P_0$ y $P_1$; en particular, para $\lambda = 1/2$ obtenemos el punto medio del segmento (su centro). Con tres puntos no alineados, $P_0, P_1, P_2$ sucede algo semejante: las coordenadas baricéntricas permiten describir los puntos del plano como $\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$ con $\alpha + \beta + \gamma = 1$; cuando las tres coordenadas son positivas, se recorre el interior del triángulo, y cuando son iguales, tenemos el baricentro $1/3 P_0 + 1/3 P_1 + 1/3 P_2$.

*Ejercicio*.- Sea el triángulo de vértices $(1, -2)$, $(3, 4)$ y $(5, 1)$. Calcule el punto medio de cada lado, la ecuación de las mediatrices y el punto en que se cortan. Compruebe que coincide con el baricentro tal como se acaba de decir.

**Espacio afín euclídeo**.- Si el espacio vectorial $V$ que sirve de dirección a un espacio afín, $A$, está provisto de un producto escalar, entonces podemos hablar de ángulos y distancias en el espacio afín, y decimos que tenemos un espacio afín euclídeo. Es el caso de los espacios $A^2$ y $A^3$, de particular interés para nosotros. Vamos a dedicar el resto de este capítulo a estudiarlos, con atención especial a sus subespacios afines, que estudiaremos mediante ecuaciones paramétricas e implícitas en un sistema de referencia. En buena medida, se trata de conocimiento que el alumno ya adquirió en cursos anteriores, por lo que ahora lo veremos a la carrera y recomendaremos que se repasen los libros y apuntes de bachillerato.

*Rectas en el plano afín* $A^2$.- La recta que pasa por dos puntos del plano, $A$ y $B$, se describe mediante las coordenadas baricéntricas como $\lambda A + (1-\lambda)B$. En coordenadas cartesianas, podemos escribir

$$\begin{cases} x = a_1 + t \cdot u_1, \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{cases}$$

siendo $a_1, a_2$ las coordenadas cartesianas del punto $A$, y $u_1, u_2$ las coordenadas del vector $AB$. Esas son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A$ con la dirección $u = AB$.

Eliminando el parámetro $t$, obtenemos la ecuación implícita de la recta: $(x - a_1)u_2 = (y - a_2)u_1$, que tiene la forma $ax + by + c = 0$. Hay multitud de formas con nombres diversos: ecuación continua, normal, general, etc. Todo ello es bien conocido y no hemos de perder el tiempo recordándolo.

Mencionemos que dos rectas en el plano han de ser coincidentes, paralelas (sensu stricto) o secantes. En $A^2$ no queda hueco para que puedan cruzarse.

*Rectas en el espacio afín* $A^3$.- Podemos decir de la recta que pasa por dos puntos del espacio, $A$ y $B$, algo similar a lo que acabamos de decir para rectas en el plano: en coordenadas baricéntricas se ve como $\lambda A + (1-\lambda)B$; en coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} x = a_1 + t \cdot u_1, \\ y = a_2 + t \cdot u_2, \\ z = a_3 + t \cdot u_3 \end{cases}$$

Al eliminar el parámetro, nos quedan ahora dos ecuaciones, que podemos escribir unidas, como $(x - a_1)/u_1 = (y - a_2)u_2 = (z - a_3)/u_3$, en lo que se llama "ecuación continua de la recta", o bien como un sistema de dos ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

*Planos en el espacio afín* $A^3$.- Un plano en el espacio afín $A^3$ queda determinado por tres puntos no alineados que yazgan en él o por un punto del plano y dos vectores de dirección.

También por un punto y un vector ortogonal al plano (que se llama "vector normal"), debido a que el plano es un subespacio afín de dimensión 2 en un espacio ambiente de dimensión 3 (algo similar le sucede a la recta en el plano $A^2$). Conociendo dos vectores de dirección del plano, podemos hallar un vector normal por medio del producto vectorial. En cualquier caso, el plano se nos presentará mediante unas ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y = a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z = a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{cases}$$

Al eliminar los parámetros $t$ y $s$ nos queda la ecuación implícita del plano, que tiene la forma $ax + by + cz + d = 0$. Se aprecia ahora que las ecuaciones implícitas de la recta que aparecen más arriba la describen como intersección de dos planos.

El plano de ecuación $ax+by+cz = 0$ pasa por el origen y es paralelo al plano $ax+by+cz+d = 0$ (es su dirección). Puesto que el producto escalar de $(a, b, c)$ y $(x, y, z)$ es $ax+by+cz$ (si el sistema de referencia es ortonormal), la ecuación $ax + by + cz = 0$ selecciona el plano perpendicular al vector $(a, b, c)$, que se revela así como un vector normal al plano. Conviene subrayar que si el sistema de referencia no fuera ortonormal, el argumento anterior caería en defecto, y no podría garantizarse que el vector $(a, b, c)$ fuese perpendicular al plano.

Para discutir las posiciones relativas de rectas y planos en el espacio, utilizamos sus ecuaciones y llegamos fácilmente a discernir los casos: dos planos pueden ser coincidentes, paralelos o cortarse en una recta; dos rectas pueden ser coincidentes, paralelas, secantes o cruzarse; una recta y un plano pueden cortarse en un punto, ser paralelos (en sentido estricto) o estar contenida la recta en el plano, pero nunca pueden cruzarse (por falta de dimensiones en $A^3$): los rangos de ciertas matrices obvias nos lo aclaran.

*Haces de rectas en el plano.*- Dadas dos rectas en el plano, de ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$, las combinaciones lineales de esas dos ecuaciones describen una familia de rectas, que llamamos haz de rectas: $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$. A veces se divide por uno de los parámetros, dejando la ecuación del haz como $(ax + by + c) + \alpha(a'x + b'y + c') = 0$, lo cual tiene un riesgo, y es que ahí no aparece la segunda recta (se perdió al dividir por el parámetro $\lambda$); si se es consciente de ello, esa manera de escribirlo es inofensiva. El haz en cuestión representa a todas las rectas que pasan por el punto en que se cortan las dos primeras (si son secantes), o a todas las rectas paralelas a las dadas, si es que ellas eran paralelas.

*Haces de planos en el espacio.*- Con dos planos en el espacio sucede algo similar: Si sus ecuaciones son $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, entonces la ecuación $\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ representa un haz de planos, que a veces se escribe $(ax + by + cz + d) + \alpha(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, y que representa a todos los planos paralelos a los dados (si ellos eran paralelos), o a todos los planos que pasan por la recta de corte de los dos primeros, si son secantes.

*Distancias, ángulos. Lugares geométricos.*

El producto escalar usual de $\mathbf{R}^2$ dota al espacio afín $A^2$ de una estructura euclídea que nos permita hablar de distancias y de ángulos. Sin duda, el alumno conoce bien la Geometría elemental del plano cuando describimos los puntos referidos al sistema ortonormal $(O; C)$ siendo $O = (0, 0)$ el origen y $C = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^2$ (otro tanto podemos decir de $A^3$). Vamos a repasarlo rápidamente.

Los puntos en el plano afín se identifican mediante sus coordenadas cartesianas en un sistema de referencia, $R = (O; v_1, v_2)$. La distancia entre dos puntos, $P$ y $Q$, cuyas coordenadas cartesianas en ese sistema sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ respectivamente, se calcula como la norma del vector $PQ$, es decir, como la raíz cuadrada del producto escalar $< PQ, PQ >$, que es igual a $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)G(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T$, o sea, $g_1^1(x_2 - x_1)^2 + 2g_2^1(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_2^2(y_2 - y_1)^2$, siendo $G = (g_j^k)$ la matriz de Gram en la base $B = \{v_1, v_2\}$. Si la base es ortonormal, queda la conocida expresión $\sqrt{}((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)$ para la distancia entre $P$ y $Q$.

Calcular la distancia del origen, $O$, a una recta $r$ es sencillo si disponemos de la ecuación geneal $ax + by + c = 0$ relativa a un sistema de referencia ortonormal: esa distancia es $|c/\sqrt{}(a^2 + b^2)|$, como se comprueba fácilmente.

La fórmula para la distancia de un punto cualquiera, $Q$, a la recta anterior es similar y bien conocida: $|(ax_0 + by_0 + c)/\sqrt{}(a^2 + b^2)|$, siendo $x_0, y_0$ las coordenadas de $Q$ en la referencia ortonormal en la que trabajamos.

La distancia de un punto $Q$ del espacio afín $A^3$ a un plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ se expresa mediante una fórmula análoga: $|(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/\sqrt{}(a^2 + b^2 + c^2)|$.

*Ejercicio.*- Repase en sus apuntes de bachillerato (o donde sea) cómo calcular el ángulo entre dos rectas en el plano (en un sistema de referencia ortonormal). Repase también las nociones generales y las fórmulas de la Geometría Analítica del espacio tridimensional.

Recordamos que en el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ disponemos del producto vectorial, que es una ayuda interesante para resolver diversos problemas. También nos puede venir bien el producto mixto de tres vectores (y desde luego, el producto escalar) para abordar algunas cuestiones. Rápidamente, mencionaremos que:

Para calcular el ángulo que forman dos rectas, dos planos o una recta y un plano, el producto escalar nos viene de perlas.

Para hallar la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas que se cruzan, el producto vectorial (y el mixto) nos pueden interesar.

El área de un triángulo de vértices $P_0, P_1, P_2$ en el plano $A^2$ se puede calcular mediante el producto vectorial de los vectores $P_0P_1$ y $P_0P_2$ (vistos en $\mathbf{R}^3$) y resulta una fórmula muy sencilla con un determinante:

$$(1/2) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

donde $x_k, y_k$ son las coordenadas cartesianas del punto $P_k$ en el sistema de referencia en que estemos, supuesto que sea ortonormal; si no lo fuera, la fórmula debería modificarse multiplicándola por $\sqrt{g}$, donde $g$ es el determinante de la matriz de Gram en la base que aparece en el sistema de referencia.

Análogamente, el área de un tetraedro se puede calcular mediante el producto mixto $[AB, AC, AD]$ (su sexta parte) o también como

$$(1/6) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

(debe incluirse el factor $\sqrt{g}$ si la base no es ortonormal).